Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

S. F. Lacroix.

Aus dem Französischen übersetzt

und

mit Zusätzen und Erläuterungen vermehrt

von

Dr. E. S. Unger.

Erfurt, 1818.

G. A. Keysers Buchhandlung.

Vorrede des Verfassers.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, von Pascal und Fermat erfunden, hat, seitdem nicht aufgehört Interesse zu erregen, und den Scharfsinn der berühmtesten Nachfolger jener Erfinder zu üben; aber die Elemente dieses Zweiges der angewandten Mathematik, sind in Verhältniß zu dem Stande der Wissenschaft um vieles zurück geblieben. Außer einigen oberflächlichen oder unvollständigen Werken findet man nur academische Abhandlungen oder Werke, die auf die schwierigsten Sätze der höhern Analysis gestützt sind; so daß mit den ausgebreitesten Kenntnissen in der Elementar-Mathematik man noch immer sich beschränken muß, die Wahrheit der Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die doch auf eine gründliche Art mittelst der alleinigen Beihülfe der Elementar-Algebra bewiesen werden können, auf's Wort zu glauben. Um diese Lücke auszufüllen, habe ich das Werk, das ich hiermit dem Publikum übergebe, ausgearbeitet. In dem Texte setze ich nichts voraus, was man nicht in meinen Anfangsgründen der Algebra (die deutsche Uebersetzung von Hahn in 2 Bde. ist in Berlin bei Fröhlich 1804 und 1805 herausgekommen) findet. Uebrigens habe ich mich bemühet, die Grundsätze deutlich aus einander zu setzen und den Formeln Erklärungen beizufügen, so daß man auch unabhängig von der

algebraischen Rechnung einen Begriff von der Theorie erlangen kann. Um endlich den Uebergang von diesem Werke zu denjenigen zu erleichtern, wo alle Hülfsmittel der transcendenten Analysis benutzt sind, habe ich dieses Werk mit einigen Noten geschlossen, in welchen ich von den Formeln ausgehend, die in meinen Anfangsgründen der Differential- und Integralrechnung (die deutsche Uebersetzung von Bethke unter dem Titel Handbuch der Differential- und Integralrechnung, ist in diesem Jahre in Berlin in der Realschulbuchhandlung herausgekommen) enthaltend sind, die ersten Anwendungen dieser Rechnungen auf die Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinander gesetzt habe.

Die zahlreich angeführten Original-Schriftsteller können dem Leser als Mittel dienen, den Gang dieser Lehre von ihrer Erfindung an zu folgen, ihre Einzelnheiten zu untersuchen, so wie ihre Anwendungen auf die moralischen und politischen Wissenschaften. Anwendungen, von welchen ich die Grundlage angegeben, und die ich ihrem wahren Werthe nach zu würdigen mich bemühet habe. Condorcet hegte den Wunsch, daß alles dieses der Gegenstand eines Cursus in öffentlichen Schulen werden möchte, und er hat darüber zwei vortreffliche Programme herausgegeben, das erste in seinen Memoires sur l'Instruction publique t. IX. de ses OEuvres p. 566, und das zweite in dem Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales t. XXI. de ses OEuvres p. 237, oder Elemens du Calcul des Probabilités p. 171.

Vorrede des Uebersetzers.

Im praktischen Leben sind wir keiner vollkommenen Ueberzeugung fähig, wir werden in allen unsern Handlungen durch Wahrscheinlichkeit geleitet; auffallend ist es daher, daß die Ausbildung der Lehre von dem Wahrscheinlichen unserm Zeitalter aufbewahrt blieb. Leibnitz machte auf diesen Mangel in unserer Literatur aufmerksam, und entwarf selbst den ersten Grundriß zu einer solchen Lehre (er befindet sich in den Nouveaux Essais sur l'étendement humain); auch Wolf rügt in mehreren seiner Schriften diesen Mangel, und versprach eine Theorie des Wahrscheinlichen zu bearbeiten (Wolfii Logica p. 443.), er hat aber sein Versprechen nicht erfüllt. Im Jahre 1773 erschien von Frömmichen eine Abhandlung über die Lehre des Wahrscheinlichen, die ebenfalls einen vollständigen Entwurf zu dieser Wissenschaft enthält, und außerdem findet man hier eine Menge sehr interessanter Notizen, von dem, was die meisten Gelehrten über diesen Gegenstand geäußert haben. Was den phylosophischen Theil dieser Lehre anbelangt, so ist auch bis jetzt nur sehr wenig geschehen, einige wenige Abhandlungen abgerechnet, ist ihm nur ein sehr kleines Plätzchenſin den Werken über Logick eingeräumt. Für den mathematischen Theil aber, also für die eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnuug, fehlt es ſuns keinesweges an Ma-

terialien, die besten Mathematiker haben Beiträge hierzu geliefert, ich brauche in dieser Hinsicht nur auf die Schriften von Euler, Lambert, Florencourt, Langsdorf und auf die mathematischen Abhandlungen in den Schriften mehrerer gelehrten Gesellschaften aufmerksam zu machen; aber da diese Abhandlungen durchgehends nur einzelne Gegenstände behandeln, welche Bezug auf Wahrscheinlichkeitsrechnung haben, so findet man in ihnen auch die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst nur theilweise. Ein systematisches Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir bis jetzt in Deutschland noch nicht. Ich glaube durch die Uebersetzung des Lacroixschen Werkes daher mir um so mehr ein Verdienst um das Publikum erworben zu haben, da dasselbe, ohne weniger gründlich zu seyn, auch Anfängern in der Mathematik verständlich abgefaßt ist.

Schlüßlich bemerke ich noch, daß ich um das Setzen der Formeln zu erleichtern, das französische Original mit in die Druckerei gegeben habe, und daher sind auch einige in dem Werke von Lacroix befindliche Druck- und Rechnungsfehler in der Uebersetzung stehen geblieben. Ich glaube übrigens nicht, daß außer den zu Ende angezeigten Druckfehlern noch bedeutende sich eingeschlichen haben.

Inhalt.

(Bemerkung. Der größte Theil der hier angezeigten Stellen besteht aus solchen, die Fundamentalsätze enthalten, oder Auseinandersetzungen, die von aller Rechnung unabhängig sind. Alle andere Stellen sind durch ein Sternchen bezeichnet.)

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Seite

Lehrbuch

der

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Vorläufige Bemerkungen über den Sinn der Worte Gewißheit und Wahrscheinlichkeit.

§. 1.

Das unmittelbare Bewußtseyn einer Empfindung, die augenblickliche und völlig überzeugende Wahrnehmung der Uebereinstimmung oder Verschiedenheit zweier Vorstellungen, nennen wir, unsere physische sowohl als unsere intellectuelle Fähigkeit hierzu vorausgesetzt, den höchsten Grad der Gewißheit oder die absolute Gewißheit. Es versteht sich, daß man von der Empfindung die Urtheile trennen müsse, die sie begleiten können, sey es um über ihre Ursache abzuurtheilen, oder um sie auf besondere Gegenstände zu beziehen; und von der Vergleichung der Vorstellungen alles, was sich nicht auf einfache und so bestimmte Vorstellungen zurückführen läßt, daß sie der Verstand auf einen Blick übersehen kann.

Vergebens haben die Philosophen lange nach einem Kriterium der Wahrheit gesucht, verschieden von der vollkommenen Anschauung, die ich so eben angeführt habe; da man nach den weitläufigsten Auseinandersetzungen immer dahin zurückkommen muß, dem Geiste die Fähigkeit zuzugestehen, die Uebereinstimmung zweier Vorstellungen unmittelbar zu erkennen. Auch haben alle ihre Bemühungen, wenn sie gut geleitet wurden, zu nichts gedient, als sie auf diesen Satz zurückzuführen, der gegenwärtig von den besten Köpfen zugestanden ist, die überzeugt zu seyn scheinen, daß der einzige Gegenstand der wesentlichsten Regeln des Denkens der ist, jeder Täuschung in dem Urtheile zuvorzukommen, welches wir von dieser Evidenz fällen, indem wir mit Vorsicht den Umfang genau abwägen, den jede Vorstellung in den verschiedenen Verbindungen erhält, und indem wir beständig die Wahrheit unserer Rückerinnerungen und die Genauigkeit unserer Eintheilungen prüfen. Dahin lassen sich auch die berühmten Regeln des Descartes zurückführen, denen man noch nichts Wesentliches hat beifügen können. *)

---

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese Regeln anzuführen, und ihnen die beizufügen, die Newton für physicalische Untersuchungen gegeben hat, da wir in der Folge Gelegenheit haben werden, Folgerungen für unseren Gegenstand daraus abzuleiten.

Regeln von Descartes (Discours de la Methode éd. de 1637. pag. 20.)

1) Man halte nichts für wahr, was man nicht als unbezweifelt wahr erkannt hat, d. h. man vermeide sorgfältig die Uebereilung und das Vorurtheil, und nehme nichts im Urtheile an, was sich nicht so bestimmt und deutlich der Vernunft darstellt, daß man auch nicht die geringste Ursache hat, es in Zweifel zu ziehen.

2) Man theile jede Schwierigkeit, die man untersuchen will, in so viele Theile als möglich und als erforderlich ist, um sie am besten zu lösen.

§. 2.

Aus den unserm Gedächtnisse anvertrauten Empfindungen und einfachen Urtheile, entstehen Reihen von Folgerungen, deren Gewißheit von einem neuen Elemente abhängig ist, nämlich der Treue, mit welcher uns dieses Gedächtniß das zurückgiebt, was wir erfahren haben. Das Zutrauen, das wir in dieser Hinsicht erlangen, gründet sich nur auf die beständige Wiederholung des Geschehenen, und auf die Bestätigung, die diese Wiederholung durch ihre Erneuerung uns giebt, so oft wir es wünschen oder die Umstände uns

---

3) Man ordne seine Gedanken so, daß man mit den einfachsten und am leichtesten zu erkennenden Gegenständen anfängt, um stufenweise zu den zusammengesetztesten hinaufzusteigen, und suche auch diejenigen zu ordnen, die nicht natürlich auseinander folgen.
4) Man mache seine Eintheilung so vollständig, und verschaffe sich eine so allgemeine Uebersicht, daß man versichert seyn kann, nichts vergessen zu haben.

Regeln von Newton.

1) Man nehme nicht mehr Ursachen an, als unumgänglich nöthig sind, um die Phänomene zu erklären.
2) Wirkungen gleicher Art müssen so viel als möglich einer und eben derselben Ursache zugeschrieben werden.
3) Diejenigen Eigenschaften der Körper, die weder der Vermehrung noch der Verminderung unterworfen sind, und die bei allen Körpern angetroffen werden, so weit Erfahrung reicht, müssen als allgemeine Eigenschaften aller Körper angesehen werden.
4) In der Experimentalphilosophie müssen die durch Induction von den Phänomenen abgeleiteten Sätze, aller widersprechenden Hypothesen ungeachtet, als unbezweifelt oder als zum Theil wahr angenommen werden, bis andere Phänomene ihnen entweder ganz widersprechen, oder zeigen, daß sie Ausnahmen zulassen.

darauf hinführen. Hier zeigt sich ein Hang oder ein Gesetz des menschlichen Geistes: die allgemeine Neigung, an die Rückkehr der Begebenheiten, die wir mehrmals an uns oder an andern Gegenständen erfahren haben, zu glauben; eine Neigung, die sich an die Meinung knüpft, die wir früh von der Beständigkeit der Naturgesetze fassen.

Die Sätze: alle Menschen sind sterblich; die Sonne wird Morgen aufgehen; ich bin diesem Beweise gefolgt, ich habe alle Theile richtig gefunden, und habe mich von der behaupteten Wahrheit überzeugt, haben keinen andern Grund.

So viele Thatsachen, denen man noch nichts sicheres hat entgegensetzen können, haben die Sterblichkeit des menschlichen Geschlechts beurkundet; die Sonne ist so oft aufgegangen; jeder Mensch in gesundem Zustande und mit gesunder Vernunft begabt, hat so deutlich, wenn er gewollt hat, die Wahrheit der einfachen Sätze, aus denen ein Beweis besteht, eingesehen; daß man auch nicht im geringsten die Wiederholung dieser Ereignisse bezweifelt, obgleich man nicht umhin kann, eine wesentliche Verschiedenheit, von dem Bewußtseyn einer Empfindung, oder der Anschauung eines Satzes, der sich auf zwei einfache Vorstellungen stützt, deren Verbindung klar ist, zu erkennen. Auch kömmt die auf diesem Wege erhaltene Gewißheit der absoluten Gewißheit sehr nah; welche Sicherheit haben wir inzwischen, daß ein Naturgesetz, das sich unsern Augen noch nicht enthüllt hat, nicht die Folge dieser Begebenheiten ändern werde, die zwar beinahe unendlich vielmal wiederkommen, aber doch ohne daß wir die Art wie die Ursachen wirken, oder die Nothwendigkeit ihrer wechselseitigen Abhängigkeit hätten erkennen können. *)

*) Siehe die philosophischen Schriften von Hume.

§. 3.

Wenn wir von Begebenheiten, von denen uns noch keine Ausnahmen bekannt sind, zu andern übergehen, die deren zulassen, so sehen wir den Zweifel sich mehr und mehr in unserer Seele einschleichen. Wenn es z. B. darauf ankömmt, etwas von dem Zeugnisse eines andern abhängig zu machen, so wird die Menge der unwillkührlichen Irrthümer und der vorsetzlichen Lügen den vernünftigen Mann in seiner Beruhigung über die erhaltene Auskunft sehr vorsichtig machen. Jede Thatsache, die er selbst wird bewahrheiten können, oder die, indem sie nicht außergewöhnlich ist, keiner Erläuterung bedarf, wird in seiner Seele die Gültigkeit der Zeugnisse befestigen; aber entdeckte Hintergehungen werden ihn wankend machen, und dies um so mehr, je häufiger sie sind. Er wird die widersprechenden Resultate gegen einander abwägen, wird oft zweifelhaft bleiben, und muß er sich erklären, so wird er sich nur auf die Seite schlagen, deren Gründe ihm zahlreicher, mehr unter sich zusammenstimmend, mehr seinen Beobachtungen oder hinlänglich bestätigten Thatsachen entsprechend, zu seyn scheinen.

Ein Beobachter, der das häufige Zusammentreffen des Regens, mit dem Falle des Quecksilbers im Barometer, mit dem Wehen gewisser Winde, mit einem gewissen Zustande der Wolken bemerkt hat, wird den Regen für nahe halten, wenn alle diese Umstände zusammen treffen, ohne jedoch bestimmt versichern zu können, daß dieser Fall unfehlbar eintreten werde; denn er wird sich zugleich erinnern, daß alle diese Anzeigen zuweilen trüglich waren; daß das Quecksilber im Barometer fiel, und daß der Himmel bedeckt war, ohne daß es geregnet hätte, daß Winde oder höhere unbemerkte Luftströme oder andere Veränderungen der Atmosphäre die drohendsten Wolken zerstreuten Aber er wird mit desto größerer Zuversicht Regen erwar-

ten, jemehr die seiner Vermuthung entsprechenden Fälle die entgegengesetzten überwiegen.

Die Begebenheit, nämlich das Fallen des Regens, obgleich zweifelhaft für den, der die Anzeigen davon beobachtet, ist dessen ungeachtet nicht zufällig, sie hängt von dem vorhergehenden und gegenwärtigen Zustande der Atmosphäre und von den nothwendigen Folgen dieses Zustandes ab. Ein höherer Verstand, dem alle nöthigen Bedingungen deutlich sind, wird sogleich schlüßen, was folgen muß; der Mensch aber beschränkt in seinen Kenntnissen, der nicht die ersten Bedingungen von der Nothwendigkeit dieser Begebenheit deutlich einsehen oder keine vollständige Unterscheidung machen kann, wiederholt sich die Anzeigen, die jene bei ihm vertreten, und wenn bei dieser Handlung die nach und nach gefolgerten Schlüsse mehr dafür, als dawider sind, „so wird sein Geist (sagt Hume) eher auf die Begebenheit als auf ihr Gegentheil fallen. Das Zusammentreffen von mehreren verschiedenen Ansichten bei einer einzelnen Begebenheit, bewirkt durch einen unerklärbaren Mechanismus der Natur, unmittelbar das Gefühl des Fürwahrhaltens, und giebt dieser Begebenheit einen Vorrang von der entgegengesetzten, bei welcher eine kleinere Anzahl von Ansichten anzutreffen ist, und die daher dem Verstande nicht so oft begegnet." *)

§. 4.

Das oben entwickelte Beispiel ist von der Art, daß sich die Urtheile unmittelbar durch die Anzeigen der Er-

---

*) Hume, von der Wahrscheinlichkeit. Die deutsche Uebersetzung von Tennemann hat den Titel: David Hume's Untersuchung über den menschlichen Verstand. Jena 1793. Obige Stelle befindet sich zu Anfang des 6ten Abschnitts. U.

fahrung bilden, aber es ist auch denn noch dasselbe, wenn die Schlußfolge verwickelter ist.

Sobald der Gegenstand nicht alle nöthigen Bedingungen zur Gewißheit eines Beweises zu gelangen darbietet, so wird man nur alle bekannten Umstände prüfen können, indem man ihre Wichtigkeit abwägt und ihre Anzahl in Betrachtung zieht. Soll z. B. die Frage entschieden werden: ob ein Werk wohl von dem Verfasser sey, dessen Namen es führt, so muß man vorher aus der Untersuchung der Thatsachen und der Zeugnisse, aus der Vergleichung der Schreibart, alle die Anzeigen, die für und wider die Behauptung sind, schöpfen. Wenn einerseits keiner der Umstände, indem er keinen offenbaren Widerspruch enthält, die absolute Unmöglichkeit der Behauptung beweißt, und anderer Seits wenn alles dafür Sprechende nur auf unvollständige Beweise hinläuft, oder auf solche die Abänderungen erleiden können, so geht aus dem Ganzen nur eine Vergleichung der bestätigenden und der widersprechenden Urtheile hervor, die eine ihrer Anzahl und ihrer Stärke proportionirte Wirkung hervorbringen, wenn anders der Untersucher alles angewendet hat, sich vor Täuschung zu hüten, und nicht schon zum Voraus für das eine oder andere eingenommen ist.

Dieses führt auf den Unterschied zwischen Stärke und Anzahl der Anzeigen, aber allezeit läßt sich die erstere auf die letztere zurückführen; denn was kann man wohl eine stärkere Anzeige nennen? Es ist eine solche, die seltener trügt, die also eine größere Anzahl Fälle, die für das Hervorbringen einer behaupteten Begebenheit günstig sind, oder Entwickelungen, aus denen eine größere Anzahl Umstände entspringen, die auf denselben Schluß führen, in sich faßt. Indem man diese Betrachtung verfolgt, sieht man, daß sobald der menschliche Geist nicht zur Gewißheit kommen kann, den Gang der Untersuchung den Charakter einer Rechnung annimmt, deren Resultat die Herrschaft über unser Fürwahrhalten gewinnt, genau nach der

Wirkung der wiederholten Urtheile oder Beobachtungen. Der Werth dieser Rechnung hängt hier wie überall von der Wahl des gegebenen und hierauf von der guten Anwendung desselben ab. Diese gute Anwendung aber kann in nichts andern bestehen, als in einer strengen Prüfung des Gegebenen, in der Sorgfalt es so viel als möglich zu entwickeln, um blos über Sätze von gleicher Einfachheit und gleicher Evidenz urtheilen zu können, und hauptsächlich darin, sich vor jeder Partheilichkeit zu gunsten irgend eines Resultats zu hüten.

§. 5.

Es würde nichts zu wünschen übrig bleiben, wenn man alles auf einen solchen Punkt zurückführen könnte, daß es mit dem Wurfe eines Würfels von bestimmter Anzahl Seiten, die mit verschiedenen Farben oder Nummern bezeichnet sind, vollkommen gleich wäre. Wenn die Figur dieses Würfels vollkommen regelmäßig, seine Masse ganz gleichartig, sein Fallen hinlänglich verschieden und nicht wohl vorauszusehen wäre, so daß man durchaus keine Ursache hätte zu vermuthen, daß er eher auf eine als auf die andere Seite fallen werde, und er hätte z. B. 5 weiße Seiten und eine schwarze, so wird der Verstand, indem er die Anzahl der weißen Seiten größer als die der schwarzen findet, öfterer für die Möglichkeit der ersteren als für die der schwarzen urtheilen, und durch die Wirkung dieser Wiederholung des Urtheils der Möglichkeit, wie ich schon nach Hume und Condorcet bemerkt habe, wird er eher das Fallen auf eine weiße Seite als das auf eine schwarze vermuthen. Das, was ein nur einigermaßen aufgeklärter Verstand bei dem eben erwähnten Beispiele fühlte, wird auch den Unwissendsten auffallen, wenn wir anstatt eines Würfels mit 6 Seiten, einen mit einer Million weißen Seiten und einer schwarzen setzen, oder eine Urne, worin eine

Million weiße Kugeln und eine schwarze enthalten sind. In diesem Falle können wir uns nicht erwehren mit sehr großem Zutrauen zu erwarten, daß eine weiße Seite oder Kugel zum Vorschein kommen werde, während das Erscheinen einer schwarzen Seite oder Kugel uns in Erstaunen setzen würde. Man wird nun bald sehen, daß die Rechnung beide Fälle berücksichtigt.

Ich muß bei dieser Gelegenheit bemerken, daß wenn es die Vorstellung der Beständigkeit der Naturgesetze ist, die unser Vertrauen auf die Rückkehr der Ereignisse, die wir mehrmalen beobachtet haben, begründet, es noch dieselbe Vorstellung ist, auf die sich unsere Ungewißheit stützt, und unsere ganz gleichgültige Meinung über die Fälle, die durch die bei dem Spiele gebräuchlichen Instrumente vorkommen können, vorausgesetzt, daß sie nicht betrüglich gemacht sind oder angewendet werden. Denn nur aus der Beständigkeit der Naturgesetze geht hervor, daß wenn alle bestimmenden Umstände dieselben sind, auch die Wirkungen dieselben bleiben müssen, und daß diese verschieden seyn müssen, wenn jene verschieden sind. Darum geben wir uns auch Mühe, sie soviel als möglich zu verändern, wenn wir Hazardspiele spielen. Man vermeidet z. B. den Würfel mehrmal, auf dieselbe Seite in den Becher zu legen, den Wurf abzumessen, man giebt sich Mühe, die Urnen, welche die Nummern enthalten, auf eine sehr unregelmäßige Weise zu schütteln, oder die Karte zu mischen. Eben so, wenn die Bewegung unserer Gliedmaßen nicht durch lange Gewohnheit in unserer Gewalt ist, wird die Unregelmäßigkeit dieser Bewegungen die Spiele der Geschicklichkeit bald in Hazardspiele verwandeln, aber so wie die Geschicklichkeit zunimmt, wird das Zufällige vermindert.

§. 6.

Man sagt daher mit vielem Rechte: „daß es eigentlich keinen Zufall gäbe, aber sein Equivalent, nämlich un-

sere Unwissenheit über die wahren Ursachen der Ereignisse"*) woraus nun die Wahrscheinlichkeit entspringt, indem wir die Ursachen nicht vollständig angeben, oder ihre Wirkungen unfehlbar voraus sehen können. Der augenscheinlich einfachste Fall ist der, wo die Anzahl dieser Wirkungen hinlänglich bekannt, und jede von ihnen gleich möglich ist; dieses ist der Fall beim Würfel. Da die Anzahl der Urtheile, die man für das Treffen einer gewissen Farbe bilden kann, dieselbe ist, als die der Seiten, welche diese Farben haben, so wird auch diese Anzahl den Grad des Zutrauens bestimmen, mit welchem man das Erscheinen einer dieser Seiten erwartet, denn vermehrt man ihre Anzahl, so wächst auch der Grad des Zutrauens. Aber es ist nicht diese Zahl für sich, die man hierbei berücksichtigen muß, denn wenn man die Zahl der schwarzen Seiten eben so vermehrt, wie die der weißen, so daß beide z. B. das doppelte werden, so läßt sich nicht einsehen, warum der Grad der Hoffnung auf das Treffen einer bestimmten Farbe sich ändern sollte, da das Verhältniß der Urtheile für und wider noch immer dasselbe bleibt. Für 10 weiße und 2 schwarze Seiten hat man 5 Urtheile zu Gunsten einer weißen Seite gegen ein einziges für eine schwarze.

Hieraus folgt, daß das Maaß des Grades der Hoffnung für eine Farbe, das Verhältniß zwischen den bestätigenden Fällen, zu der Anzahl der bestätigenden und widersprechenden zusammen, d. h. zu ihrer gesammten Summe seyn muß; oder auch das Verhältniß der Zahl der Seiten von der Farbe, die man bestimmt zu der Anzahl aller Seiten, also im obigen Beispiele $\frac{5}{6}$ für eine weiße Seite.

Dieses Verhältniß nennt man die **mathematische Wahrscheinlichkeit**, sie entsteht, wie man sieht, in-

---

*) Hume. Deutsche Uebersetzung von Tennemann. S. 124. U.

dem man die Zahl der einem Ereignisse günstigen Fälle, durch die Zahl aller Fälle theilt. Aber man muß wohl acht haben, daß alle die verglichenen Fälle gleich möglich seyen. Der Wurf der Würfel wird uns bald Gelegenheit geben, die Nothwendigkeit dieser Einschränkung zu beweisen.

§. 7.

Wenn man mit 2 sechsseitigen Würfeln, von welchen jeder mit 1 bis 6 bezeichnet ist, würft, so wird man bei einigen Nachdenken einsehen, daß jede Seite des einen Würfels mit jeder des andern zusammen fallen könne, so daß man, wenn der erste mit A, der zweite mit B bezeichnet wird, 36 Fälle haben wird, die in der folgenden Tafel angegeben sind.

A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Alle in dieser Tafel angegebenen Verbindungen sind gleichmögliche Fälle, so lange man jeden Würfel für sich betrachtet, so z. B. 5 zu werfen mit dem Würfel A und 2 mit B ist ein gleicher Fall wie der 6 mit beiden zu werfen. Aber wenn man den Wurf 2 und 5 ohne Unterschied der Würfel erwartet, so wird die Möglichkeit verschieden seyn von der, 6 und 6 oder einen Pasch zu werfen, weil die erstere Bedingung eben so wohl erfüllt ist,

durch den Wurf 2 und 5 als durch den 5 und 2, während 6 und 6 sich nur ein einziges mal unter den 36 gleich möglichen Verbindungen der Würfelseiten befindet. Also nach der eben gegebenen Erklärung ist die Wahrscheinlichkeit, die Zahlen 5 und 2 ohne Rücksicht auf die Ordnung zu werfen $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ und die 6 und 6 zu werfen nur $\frac{1}{36}$.

Wenn das verlangte Ereigniß nicht das Treffen der einzelnen Zahlen für sich, sondern ihre Summe ist, so findet man sehr verschiedene Möglichkeiten der Fälle, z. B. die Zahl 2 kann man nur auf eine einzige Art erhalten, nämlich durch 1 und 1, die Zahl 7 hingegen kann aus 6 verschiedenen Verbindungen entspringen, nämlich aus:

1, 6 | 6, 1 | 2, 5 | 5, 2 | 3, 4 | 4, 3 |

und nach diesen Bedingungen wird die Möglichkeit 2 zu erhalten nur $\frac{1}{36}$ seyn, jene hingegen 7 zu erhalten $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

§. 8.

Die §. 6. gegebene Erklärung von der mathematischen Wahrscheinlichkeit und obige Beispiele zeigen deutlich, daß man sie immer durch einen ächten Bruch ausdrücken kann, d. h. durch einen solchen, der kleiner als die Einheit ist, welcher er sich um so mehr nähert, je größer die Anzahl der günstigen Fälle im Verhältniß zur Anzahl aller möglichen Fälle wird; aber er kann nur in dem Falle zur Einheit werden, wenn auch nicht ein einziger ungünstiger Fall vorhanden ist, wodurch Gewißheit entstehen würde, so also daß die Einheit das Symbol der Gewißheit ist.

Es ist hier füglich zu bemerken, daß jede ungewisse Begebenheit 2 einander entgegengesetzte

Wahrscheinlichkeiten enthält, nämlich daß das Ereigniß eintreffen werde und daß es nicht eintreffen werde; und daß die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten jedesmal der Einheit gleich sey. Soll z. B. mit 2 Würfel die Zahl 7 geworfen werden, so ist, weil unter den 36 möglichen Fällen nur 6 sind, welche die Zahl 7 geben, und daher 30, welche diese Zahl nicht geben, die Wahrscheinlichkeit 7 zu werfen, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und die Wahrscheinlichkeit für den entgegengesetzten Fall $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ und $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$.

§. 9.

Nachdem auseinander gesetzt worden, wie der Begriff Wahrscheinlichkeit in unserer Seele entsteht, und wie dieselbe in gewissen Fällen einer Messung fähig ist, wird es nicht überflüssig seyn, die verschiedenen Bedeutungen zu untersuchen, die man dem Worte Wahrscheinlich (probable), wovon Wahrscheinlichkeit (probabilité) abgeleitet ist, gegeben hat. Die Wurzel ist in dem Worte probabilis, welches nach der Analogie seiner Bildung das bezeichnen soll, was sich bewähren kann.*) Cicero sagt: „wahrscheinlich ist was gewöhnlich geschieht, oder was in der Meinung begründet ist, oder endlich was mit diesem einige Aehnlichkeit hat, sey es wahr oder nicht,“ eine eben nicht lichtvolle Erklärung.**)

„Das Wahrscheinliche, nach Aristoteles, ist ein Satz der entweder allen wahr scheint, oder den meisten, oder

---

*) Probabilis qui probari et credi potest (Facciolati Lexis.)

**) Probabile est id, quod fere fieri solet, aut quod in opinione positum est, aut quod habet in se ad haec quandam similitudinem, sive id falsum est, sive verum (Cicero de Inventione lib. I. cap. 29.)

allen Weisen, oder dem größten Theile von ihnen, oder den berühmtesten. *) Hier zeigt sich die Grundlage jener lächerlichen Theorie des Probabilism, nach welcher die Jesuiten behaupten, daß der Beifall, den ein angesehener Gelehrter irgend einem Satze gebe, hinreiche, ihn wahrscheinlich zu machen. Eine Theorie, von welcher Pascal so unterhaltend das Absurde gezeigt hat (OEuvres tom. I. p. 78.)

Keine der angeführten Stellen enthält den wahren Sinn, den die Schriftsteller, die mit Genauigkeit sich ausdrücken, dem Worte Wahrscheinlich (probable) geben. Das Wahrscheinliche ist nicht das, was sich jetzt bewähren kann, sondern was in den meisten Fällen zutreffen soll, was aus der größern Anzahl Fälle hervorgeht, was man mit mehr Grund behaupten als verwerfen kann, endlich dasjenige, dessen mathematische Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Ein Ereigniß oder ein Satz kann mehr oder weniger wahrscheinlich seyn, als ein anderer, aber ein Ereigniß oder ein Satz von geringer Wahrscheinlichkeit ist ungefähr das Gegentheil von dem Wahrscheinlichen, denn man erwartet hiernach daß weniger Gründe für den Glauben vorhanden sind, das Ereigniß oder der Satz werde zutreffen als für das Gegentheil, und daß die mathematische Wahrscheinlichkeit bedeutend geringer als $\frac{1}{2}$ sey.

§. 10.

Aus allem vorhergehenden folgt, daß das Wort Wahrscheinlichkeit schlecht angewendet ist, wenn man es den

---

*) Probabile Aristoteli est propositio quae omnibus, aut plerisque, aut sapientioribus, iisque vel omnibus, vel plerisque, vel celeberrimis, vera videtur. (Chauvini Lexicon philosophicum.)

unbestimmten sich öfters widersprechenden Wahrnehmungen beilegt, die sich in Menge darbieten, sobald man einen Gegenstand nur oberflächlich betrachtet. Cicero behauptet: „Es gebe nichts, daß man nicht in einer Unterredung wahrscheinlich machen könnte;" *) dieser rednerische Kunstgriff aber kann nur statt finden, wenn man eine unvollständige Aufzählung der Theile vorlegt, indem man künstlich einen Theil des Gegenstandes versteckt. Dieses ist auch der Fall, wenn man durch Vorurtheil, durch den Einfluß dessen, was man wünscht, auf die Untersuchung, sich selbst betrügt, indem man einen Gegenstand nur einseitig betrachtet, mit Eigensinn seine Aufmerksamkeit nur auf eine einzige Folgerung heftet. Die Einbildungskraft zeigt sich und man betrachtet hiernach Begebenheiten als sehr wahrscheinlich oder selbst als gewiß, welche von allen, die sie bei ruhiger Vernunft der Prüfung unterwerfen, als offenbar falsch erkannt werden. Was uns verleitet, eine Meinung anzunehmen, ist nicht immer ihre Wahrscheinlichkeit. Sobald keine vollständige Erörterung, keine Entwickelung der günstigen und ungünstigen Fälle statt findet, so findet auch im eigentlichen Sinne keine Wahrscheinlichkeit statt. Es ist blinder Glaube, Täuschung, leidenschaftliche Uebereilung. Es ist die Gewohnheit diesen vorgefaßten Meinungen nachzugeben, die in einer so großen Menge Köpfen, eine stäte Unsicherheit, ein Schwanken der Begriffe hervorbringt, die sie zum Spielzeug aller Lächerlichkeiten und Ausschweifungen macht, die die Mode oder das Interesse täglich erzeugt.

---

*) Nihil est tam incredibile quod non dicendo fiat probabile. (Cicero, praefat. paradox.)

Die verschiedenen Begriffe, die die Alten mit dem Worte probabile verbinden, haben ihren Ursprung in der Zweideutigkeit des Wortes selbst, wie sich auch schon aus den beiden angeführten Stellen von Cicero abnehmen läßt. Ueberhaupt wurde damit bezeichnet, was leicht Beifall findet, und es mußte daher in der Redekunst einen ganz andern Sinn haben, als in der Philosophie. — Die Geschichte dieses Wortes

Es ist wahr, daß die Gewohnheit des Geistes und die individuelle Stimmung gewisse Eindrücke schwächen und andere erhöhen; aber dieser Wirkung zuvorzukommen ist der Zweck der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder der vernünftigen Untersuchung. Wie auch Condorcet sagt: „Es ist niemand, der nicht an sich selbst bemerkt hätte, daß er seine Meinung über gewisse Gegenstände geändert, nach dem Alter, den Umständen, den Ereignissen, ohne jedoch sagen zu können, daß diese Aenderung sich immer auf neue Gründe gestützt hätte, ohne es einer andern Ursache beimessen zu können, als dem stärkern oder schwächern Eindrucke desselben Gegenstandes. Aber wenn man anstatt nach diesem Eindrucke zu urtheilen, der einen Theil der Gegenstände vermehrt oder vergrößert, während er die übrigen zu bemerken verhindert, sie zählen oder nach der Rechnung schätzen könnte, so würde unsere Vernunft aufhören der Sklave unserer Eindrücke zu seyn." (Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions etc. Discours préliminaire, pag. CLXXXV.)

§. 11.

Dieser Wunsch, der nur der eines Menschenfreundes seyn kann, ist unglücklicherweise noch sehr weit von seiner Erfüllung. Bis jetzt hat man nur eine sehr geringe Zahl von Fragen gelöst, die wirklich wichtig sind, hinsichtlich des Benehmens der Gesellschaft oder einzelner, und man konnte in diesem Theile der angewandten Mathematik, wie in jedem andern, aus Mangel an Kenntniß der ersten Grundsätze, von denen man ausgehen muß, oder weil man nicht hinlänglich bestätigte Thatsachen in gehöriger Menge hatte,

---

findet man vollständig behandelt in Frömmichen: Ueber die Lehre des Wahrscheinlichen und den politischen Gebrauch desselben. Braunschweig und Hildesheim 1773.

die Rechnung mißbrauchen. Aber die gewissenhaften Prüfungen, die im Verfolg dieses Werkes gemacht werden, die verschiedenen Anwendungen der Rechnung werden zeigen, daß man wohl noch einige Hoffnung zu weitern Fortschritten hegen dürfte, wenn die Menge der Beobachtungen, zu welchen die gesellschaftliche Verfassung Gelegenheit geben kann, nicht durch die Nachlässigkeit der Zuschauer verloren gingen, oder durch die Eigenliebe der Menschen, in der Absicht ihre Fehler zu verdecken, oder die Verdienste ihrer Vorgänger zu verdunkeln, nicht zur Vergessenheit verdammt würden. Ein Umstand, der der Aufmerksamkeit sehr würdig ist, und auf welchen wir Gelegenheit haben werden zurück zu kommen, ist daß die Begebenheiten, die die zufälligsten zu seyn scheinen, wenn man sie einzeln betrachtet, eine regelmäßige Ordnung zeigen, sobald man sie in großer Anzahl entweder gleichzeitig, oder nach und nach beobachtet. Und die Rechnung zeigt, wie man ohne die Natur ihrer Ursachen oder die Zahl der Verbindungen zu kennen, die sie hervorbringen oder ihnen widersprechen, die Grenzen ihrer respectiven Möglichkeiten angeben, und folglich auf ihr Wiederkommen nach den Regeln der Klugheit spekuliren kann. *)

---

*) Wenn diese Hülfsmittel uns mangeln, so können wir dennoch aus den weisen Bemerkungen Condorcet's Nutzen ziehen, wenn wir uns genaue Noten von den Eindrücken anfertigen, welche Gegenstände und Schriften, die uns auffallen, auf uns gemacht haben; von den Grundsätzen, die wir in Folge dieser Eindrücke annehmen, und von den Gründen, auf die sie gestützt sind, um, wenn wir es wollen, zu dem Ursprunge dieser Urtheile zurückgehen zu können, indem wir uns in die Zeit versetzen, wo wir sie gebildet, und uns die Basis wieder vor Augen stellen, die wir ihnen gegeben haben. Durch öftere Musterungen dieser Art würden wir, glaube ich, unsere Bestimmungen fester machen, und die Veränderungen unserer Meinungen von sicherern Gründen abhängen lassen, und vielleicht würde man dahin kommen, das, was von der veränder-

Diese neue Theorie, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung Fragen unterwirft, in welchen die Gesammtzahl aller Fälle und ihr Verhältniß zur Zahl der Fälle jeder Art unbegränzt oder unangebbar sind, wird im zweiten Theile dieser Abhandlung auseinander gesetzt werden. Der erste wird nur Fragen enthalten, bei welchen diese Verhältnisse a priori sich bestimmen lassen.

---

lichen Macht der Eindrücke abhängt, vollkommen von dem zu unterscheiden, was die Wahrheit der Sache, die wir suchen sollen, mit sich bringt. „Denn wir müssen nicht (Marc. Aurel.) die Meinung der Väter annehmen, aus dem einzigen Grunde, weil die Väter sie gehabt haben.“

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, wenn die Anzahl der Fälle jeder Art, oder das Verhältniß ihrer Anzahl bestimmbar ist, und a priori aus den Bedingungen der Aufgabe abgeleitet werden kann.

§. 12.

Aus §. 6. ergiebt sich, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch den Bruch gemessen wird, welcher entsteht, wenn man die Anzahl der günstigen Fälle durch die Summe aller Fälle theilt, und dabei beachtet, nur gleich mögliche Fälle in Rechnung zu bringen. Bezeichnet man durch m die Anzahl der einem Ereignisse günstigen Fälle und die Anzahl der ihm widersprechenden durch n, so wird die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses durch

$$\frac{m}{m+n}$$

ausgedrückt, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{n}{m+n} \text{ oder } 1 - \frac{m}{m+n},$$

so daß, wenn man die erstere durch e anzeigt, die letztere 1 — e seyn wird.

Hat man z. B. ein Spiel von 32 Karten, unter welchen 12 Bilder sind, und es wird ein Blatt gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses ein Bild sein wird $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

Bei dieser Frage unterscheidet man nur 2 verschiedene Arten Fälle, nämlich die, daß ein Bild gezogen wird, und die, ein anderes Blatt zu ziehen. Es giebt hier nicht mehr als diese beiden Arten, so daß die Eine nur statt haben kann, wenn die andere ausgeschlossen bleibt. Unterscheidet man aber auch die Farbe der Bilder, und untersucht die Möglichkeit ein Bild in coeur, carreau, pique, oder trèfle zu ziehen, so hat man 5 Arten von möglichen Fällen. Die Wahrscheinlichkeit ein Bild von einer bestimmten Farbe zu ziehen, ist $\frac{3}{32}$, weil 3 Bilder von jeder Farbe in der Karte enthalten sind. Die Auseinandersetzung aller möglichen Fälle giebt die Wahrscheinlichkeit

$\frac{3}{32}$ für ein Bild in Coeur,
$\frac{3}{32}$ . . . . . . Carreau,
$\frac{3}{32}$ . . . . . . Pique,
$\frac{3}{32}$ . . . . . . Trèfle,
$\frac{20}{32}$ daß man kein Bild zieht, die Summe dieser Brüche beträgt 1.

Es bleibt immer dasselbe, es mögen auch noch so viele Arten verschiedener Fälle möglich seyn. Eine Urne, die m weiße Kugeln, n rothe, p blaue, q grüne, r gelbe und s schwarze enthält, und aus welcher eine Kugel zufällig gezogen werden soll, bietet 6 Arten von Fällen dar, die zusammen die Zahl

$$m + n + p + q + r + s = T$$

ausmachen, und es ist die Wahrscheinlichkeit

$\frac{m}{T}$ eine weiße Kugel zu ziehen,

$\frac{n}{T}$ eine rothe Kugel zu ziehen,

und eben so für die übrigen. Die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten ist

$$\frac{m + n + p + q + r + s}{T} = \frac{T}{T} = 1.$$

Ich bemerke hier, daß alle Aufgaben über Wahrscheinlichkeit, bei welchen Rechnung anwendbar ist, durch einen Zug aus einer oder mehreren Urnen, die verschiedne Kugeln enthalten, vorstellig gemacht werden können, oder durch Würfel von beliebiger Anzahl verschieden bezeichneter Seiten. Um sich einen Wurf gleicher Würfel vorstellen zu können, muß man sich die Würfel als längliche Prismen oder aus Pyramiden zusammengesetzt denken, so daß sie nur auf den Seiten liegen bleiben können, die Parallelogramme sind.*)

---

*) Das Wort Würfel wird hier in einem weitläuftigern Sinne genommen, und darunter nur in den Fällen der regelmäßige 6seitige Körper verstanden, wenn von dem wirklichen bekannten Würfelspiele die Rede ist, in jedem Falle aber, wo durch Würfel irgend eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt vorstellig gemacht werden soll, muß man sich diese als Körper von so vielen Seiten denken, so viele Fälle nothwendig in der Aufgabe unterschieden werden müssen. Die zweckmäßigste Form ist hierbei, da jeder Wurf gleich möglich seyn muß, die der länglichen Säulen mit regelmäßigen Polygonen als Grundflächen. Diese Grundflächen dürfen natürlich zu den Seiten nicht mitgerechnet werden. Sind 4, 6, 8, 12 oder 20 Fälle möglich, so kann man auch der regelmäßigen Polyedra (die bekanntlich aus gleichen Pyramiden zusammengesetzt sind) sich bedienen. Man vergleiche hiermit §. 5.

§. 13.

In den obigen Beispielen wurde nur die absolute Wahrscheinlichkeit einer jeden Art der Ereignisse betrachtet, öfters aber führen Aufgaben zu der Untersuchung einer Wahrscheinlichkeit in Verhältniß zu einer andern.

Will man z. B. bei einem Wurf mit 2 Würfel die Wahrscheinlichkeit vergleichen, daß eher 7 als 4 geworfen wird, so findet man aus §. 7., daß für die erstere Zahl 6 Fälle, für die zweite aber nur 3 möglich sind. Die absolute Wahrscheinlichkeit für die Zahl 7 ist daher $\frac{6}{36}$, die für 4 nur $\frac{3}{36}$, und die für alle übrigen Fälle $\frac{27}{36}$. Spielen daher 2 Personen unter der Bedingung mit einander, daß bei 7 der erste und bei 4 der zweite gewinnen soll, und lassen dabei alle übrigen Fälle unbeachtet, so hat der erstere 6 Fälle für sich, während der andere nur 3 für sich hat. Die Wahrscheinlichkeit ist daher

für den erstern $\frac{6}{9}$ und für den zweiten $\frac{3}{9}$

welches ebenfalls erhalten wird, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten der Zahlen 7 und 4 jede für sich durch die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten theilt. Denn man erhält:

$$\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{3}{36}} = \frac{6}{9}; \quad \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{3}{36}} = \frac{3}{9}$$

Auf gleiche Art findet man in dem Beispiele von der Urne, die Kugeln von 6 verschiedenen Farben enthält, die Wahrscheinlichkeit eher eine weiße, als eine rothe zu ziehen =

$$\frac{\frac{m}{T}}{\frac{m}{T} + \frac{n}{T}} = \frac{m}{m + n}$$

und die Wahrscheinlichkeit für den entgegengesetzten Fall, nämlich eine rothe Kugel eher als eine weiße zu ziehen,

$$= \frac{n}{m + n}$$

Bei Bestimmung der relativen Wahrscheinlichkeit läßt man alle übrigen Fälle, außer den beiden, die mit einander verglichen werden sollen, und die hierbei, als wenn sie nur allein statt finden könnten, angesehen werden, unbeachtet, weil alle übrigen Fälle in Verhältniß zu den festgesetzten Bedingungen = Null sind. Hieraus folgt, wie auch aus den obigen Beispielen hervorgeht, daß die relative Wahrscheinlichkeit erhalten wird, wenn man die absolute Wahrscheinlichkeit des verlangten Ereignisses durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden theilt, die mit einander verglichen werden sollen.

§. 14.

Oefters wird eine Wahrscheinlichkeit durch die Summe mehrerer andern erhalten; dieses ist der Fall, wenn man verschiedene Fälle in eine Klasse vereinigt, und also ihre Unterscheidungszeichen außer Acht läßt. Spielt man z. B. mit 2 Würfel unter der Bedingung, unbestimmt entweder 7 oder 8 zu werfen, so ergiebt sich aus der Tabelle §. 7., daß 6 Fälle möglich sind 7 zu werfen, und 5 Fälle daß 8 geworfen werden. Die Wahrscheinlichkeit den einen oder den andern dieser Würfe zu treffen, ist daher

$$\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

was schon daraus folgt, daß die vorausgesetzten Bedingungen 11 Fälle von den 36 möglichen als günstig unter sich begreifen.

§. 15.

Oefters ist auch das erwartete Ereigniß durch das Zusammenstimmen mehrerer andern, von welchen jedes seine eigne Wahrscheinlichkeit hat, zusammengesetzt, und muß von diesen abgeleitet werden. Soll z. B. aus einem Spiele von 32 Karten eine Figur von einer bestimmten Farbe gezogen werden, und die Karte ist in 4 Haufen getheilt, von welchen jeder die 8 Blätter einer Farbe enthält, ohne daß man weiß, wo jede Farbe liegt, so kann die bestimmte Farbe in jedem dieser Haufen sich befinden, und die Wahrscheinlichkeit gerade den rechten Haufen zu ergreifen, ist $\frac{1}{4}$, da dieser Haufen aber 8 Blätter enthält, von welchen nur 3 (die Bilder) den Bedingungen entsprechen, so ist die Wahrscheinlichkeit aus diesem Haufen ein Bild zu ziehen $\frac{3}{8}$. Um also die verlangte Karte zu ziehen, ist das Zusammentreffen zweier Begebenheiten nöthig, deren eigenthümliche Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{8}$ sind. Die Wahrscheinlichkeit dieses Zusammentreffens ist dem Producte der beiden vorhergehenden gleich, denn da die Haufen gleich sind und nur einer von ihnen die bestimmten Blätter enthält, so kann die Anzahl der günstigen Fälle nicht anders als durch $\frac{1}{4}$ aller Fälle ausgedrückt werden, und da dieses $\frac{1}{4}$, 8 Fälle in sich begreift, von welchen nur 3 die Bedingungen erfüllen, so müssen $\frac{3}{8}$ von dem $\frac{1}{4}$ genommen werden, um das Verhältniß für die Anzahl der günstigen Fälle zur Anzahl aller Fälle, oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit, zu erhalten, die daher $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$ ist.

§. 16.

Das obige Beispiel kann durch den gleichzeitigen Wurf zweier Würfel vorgestellt werden, von welchen der eine 4 Seiten hat, und zwar eine mit A bezeichnet, und 3 weiße, der andere aber 8 Seiten, von welchen 3 mit B bezeichnet und die übrigen 5 weiß sind.*) Das Zugleichfallen der Seiten A und B ist genau den im vorhergehenden § angegebenen Umständen gleich. Schließt man hier wie §. 7., so ergiebt sich, daß jede Seite des erstern Würfels mit jeder Seite des andern zugleich fallen kann, die Zahl aller Fälle ist $4 \cdot 8 = 32$, und unter diesen sind nur 3, nämlich die durch die Verbindungen der Seite A des ersten Würfels mit den 3 Seiten B des zweiten entstehen, welche die festgestellten Bedingungen erfüllen; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $\frac{3}{32} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$, wie oben auf eine andere Art gefunden wurde.

§. 17.

Im allgemeinen sey $\frac{m}{m+n}$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $\frac{p}{p+q}$ die eines andern; so wird die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider seyn.

$$\frac{m}{m+n} \cdot \frac{p}{p+q} = \frac{mp}{(m+n)\ (p+q)}$$

denn der angenommene Zufall kann dem Wurf zweier Würfel verglichen werden, von welchen der erste m mit A bezeichnete und n weiße Seiten, und der zweite p mit B bezeichnete und q weiße Seiten hat. Hiernach ist die Zahl aller möglichen Fälle $(m+n)\ (p+q)$, und unter

---

*) Man vergleiche hiermit die dem § 12 beigefügte Bemerkung.

U.

diesen sind nur m p Verbindungen, in welchen A und B zugleich getroffen werden, und nur diese entsprechen den gemachten Bedingungen. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von A und B ist daher

$$\frac{mp}{(m+n)(p+q)} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{p}{p+q}.$$

Man kann diese Schlüsse ohne Mühe auf das Zusammentreffen dreier Ereignisse A, B, C anwenden, deren eigenthümliche Wahrscheinlichkeit

$$\frac{m}{m+n}, \frac{p}{p+q} \text{ und } \frac{r}{r+s}$$

ist, und man wird die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens =

$$\frac{mpr}{(m+n)(p+q)(r+s)} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \frac{r}{r+s}$$

finden, u. s. w., für jede beliebige Anzahl von Ereignissen.

Versteht man unter einfacher Wahrscheinlichkeit die eines jeden Ereignisses für sich, und unter zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit die ihres Zusammentreffens, so ergiebt sich die allgemeine Regel: die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist dem Producte der einfachen Wahrscheinlichkeiten gleich.

§. 18.

Diese Betrachtung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit kürzt, indem sie uns der Entwickelung aller möglichen Verbindungen überhebt, öfters die Rechnung ab. Z. B. folgender einfache Fall: Man nehme an, daß man in einem Haufen alle 13 Blätter derselben Farbe eines

vollständigen Spiels Karten von 52 Blätter habe, und die Wahrscheinlichkeit ausmitteln wolle, daß die beiden obersten Blätter das As und die 2 sein werden; die Wahrscheinlichkeit, daß das As zu oberst liege, ist $\frac{1}{13}$, weil dieses Blatt jede der 13 möglichen Stellen annehmen kann; nachdem diese Karte genommen ist, bleiben noch 12, daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß die 2 das oberste dieser 12 Blätter sein werde $= \frac{1}{12}$ und die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Bedingungen ist daher

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{156}.$$

Um diese Aufgabe durch das Aufzählen aller möglichen Fällen zu lösen, muß zuvor die Anzahl aller möglichen Versetzungen von 13 Blätter ausgemittelt werden, und diese wird nach der bekannten Permutationsformel durch das Product 1. 2. 3. . . . . . . 11. 12. 13 ausgedrückt. Man muß hierauf beachten, daß wenn 2 von den 13 Blättern einen bestimmten Platz einnehmen, noch 11 übrig sind, die auf alle mögliche Arten versetzt werden können, nämlich auf 1. 2. 3. . . . . 10. 11 verschiedne Arten, und dieses sind die Fälle, die das verlangte Ereigniß hervorbringen, dessen Wahrscheinlichkeit daher ist

$$\frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots 10.\ 11}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots 10.\ 11.\ 12.\ 13}$$

und hebt man die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren 1. 2. 3 . . . . . . 10. 11, so bleibt

$$\frac{1}{12.\ 13} = \frac{1}{156}$$

eben so wie oben gefunden worden.*)

---

*) Die gefundene Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{156}$ giebt nur für den Fall, wenn zum Voraus festgesetzt ist, welches von den beiden

§. 19.

Besser noch zeigt folgende Aufgabe, die zugleich zu einigen nützlichen Bemerkungen Anlaß geben wird, die Leichtigkeit, mit welcher durch die Betrachtung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, die Auflösungen geschehen können.

Von 2 Urnen enthalte die eine 2 weiße und 1 schwarze Kugel, und die andere 4 weiße und eine schwarze. Es soll die Wahrscheinlichkeit ausgemittelt werden, daß man, indem man zufällig in eine der beiden Urnen greift, eine weiße Kugel ziehen werde.

Da die Wahrscheinlichkeit, daß man in die erste Urne greifen wird, $\frac{1}{2}$ ist, und die Wahrscheinlichkeit aus dieser eine weiße Kugel zu ziehen $\frac{2}{3}$, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Zufälle $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ oder $\frac{2}{6}$.

Blättern das erste, und welches das zweite Blatt in dem Haufen sein soll. Wird aber blos verlangt, daß die beiden Blätter zu oberst liegen sollen, ohne daß dabei die Ordnung ihrer Lage berücksichtiget wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eines von beiden oben liegen wird $= {}^2/_{13}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß des andern die zweite Stelle einnimmt ${}^1/_{12}$ und daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= {}^2/_{13} \cdot {}^1/_{12} = {}^1/_{78}$. — Nach der in dem § gegebenen zweyten Auflösung der, ohne Rücksicht auf zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, die § 12 gegebene Regel zum Grunde liegt, wird dasselbe Resultat erhalten, denn alle mögliche Versetzungen der übrigen 11 Blätter finden sowohl statt, wenn das As zu oberst liegt, und die 2 die zweite Stelle einnimmt, als auch wenn die 2 zu oberst liegt, und das As die zweite Stelle einnimmt. Unter allen möglichen Fällen $= 1. 2. 3 \ldots\ldots 11. 12. 13$ sind also $2 \times 1. 2. 3. \ldots\ldots 9. 10. 11$ günstige, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $=$

$$\frac{2}{156} = \frac{1}{78}.$$

U.

Auf gleiche Art findet man für die zweite Urne

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10}.$$

Die beiden Wahrscheinlichkeiten $\frac{2}{6}$ und $\frac{4}{10}$ entsprechen auf 2 Arten genau demselben Ereigniß und müssen daher addirt werden, um die ganze Wahrscheinlichkeit zu geben

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen, wird auf gleiche Art berechnet. Man findet für die erste Urne $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ und für die zweite $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$, ihre Summe beträgt $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$. Addirt man diese zu $\frac{11}{15}$, so erhält man die Einheit, wie es seyn muß, weil nur diese beiden Fälle möglich sind, von welchen der eine oder der andere eintreffen muß.

Es macht vielleicht einige Schwierigkeit, genau das Verfahren einzusehen, wenn man, wie oben die Wahrscheinlichkeiten verschiedner Versuche, zusammen addirt. Um dieses aufzuklären, will ich obige Aufgabe, indem ich beide Fälle verbunden betrachte, lösen, und ich werde dadurch einem Irrthum vorbeugen, in den man leicht fallen kann. Bei dem ersten Anblicke könnte man glauben, weil die beiden Züge auf die Anzahl aller in beiden Urnen enthaltenen Kugeln sich beziehen, deren Summe 8 ist, unter welchen 6 weiße sich befinden, es sey die Wahrscheinlichkeit eine Kugel dieser Farbe zu ziehen $\frac{6}{8}$ oder $\frac{3}{4}$, ein Bruch, der den Werth von $\frac{11}{15}$ übersteigt.

Der Irrthum, den man hierbei begehen würde, kömmt daher, weil die Kugeln beider Urnen nur in dem Falle zusammen gethan werden dürfen, wenn jede Urne gleich viele Kugeln enthält, und also für das Ziehen einer jeden Kugel eine gleich große Wahrscheinlichkeit statt findet, was außerdem gar der Fall nicht ist. In der That gelten bei dem Griffe

in die erste Urne, die drei Kugeln, die sie enthält, eben so viel als die 5 in der andern, thut man sie alle aber zusammen, so werden die letztern, da ihre Anzahl größer ist, eher in die Hand kommen, als die erstern, und folglich eine größere Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden für sich haben. Diese Ungleichheit verschwindet, wenn man die Wahrscheinlichkeiten auf gleiche Benennungen bringt, wodurch ihre respectiven Werthe nicht geändert werden. Bei diesem Verfahren verwandelt man die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ in $\frac{10}{15}$ und $\frac{12}{15}$, hiernach nimmt man an, die erste Urne enthalte 10 weiße und 5 schwarze Kugeln, und die andere 12 weiße und 3 schwarze. Die respectiven Wahrscheinlichkeiten sind dieselben wie vorher, und die Anzahl der Kugeln ist in jeder Urne gleich. Denkt man nun alle diese Kugeln in einer Urne vereinigt, so beträgt ihre Zahl 30, unter welchen 22 weiße sich befinden, und die Wahrscheinlichkeit eine von diesen zu ziehen, ist folglich $\frac{22}{30} = \frac{11}{15}$.

Man kann sich allgemein von der Gleichheit der durch das eine oder das andere dieser beiden Verfahrungsarten erhaltenen Resultate überzeugen, wenn man a Urnen annimmt, von welchen jede m weiße und n schwarze Kugeln enthält, und b Urnen, wovon jede p weiße und q schwarze in sich faßt. Durch das erstere Verfahren ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen =

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{p}{p+q} =$$

$$\frac{am(p+q)+bp(m+n)}{(a+b)(m+n)(p+q)} = \frac{ams+bpr}{crs}$$

wenn man der Kürze wegen

$a+b=c$, $m+n=r$ und $p+q=s$ setzt.

Bringt man statt dessen die beiden Brüche $\frac{m}{r}$ und $\frac{p}{s}$ (die die respectiven Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, ei-

ne weiße Kugel zu ziehen) auf gleiche Benennung, so erhält man $\frac{ms}{rs}$, $\frac{pr}{rs}$ und man kann alle Urnen durch eine einzige vertreten lassen, die crs Kugeln und unter diesen $ams + bpr$ weiße enthält, wodurch dieselbe Wahrscheinlichkeit, wie oben gefunden wird, sehr verschieden von dem Bruche $\frac{am + bp}{ar + bs}$, welcher entsteht, wenn man die wirkliche Zahl, der weißen Kugeln durch die wahre Gesammtzahl aller Kugeln theilt. Aus diesem Beispiele läßt sich abnehmen, wie leicht man sich bei Ausmittlung der Wahrscheinlichkeiten irren kann, und in der Folge werden wir noch auf mehrere dergleichen Irrthümer stoßen.*)

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten bei widerholten Versuchen derselben Zufälle.

§. 20.

Ich verstehe hier unter wiederholte Versuche, die mehrmaligen Würfe mit derselben Anzahl gleicher Würfel, oder die Züge von Kugeln, die man aus einer Urne nimmt und jedesmal wieder hineinlegt, um immer dasselbe Verhältniß zwischen der Zahl der Fälle jeder Art zu behalten.

Diese Gattung der Wahrscheinlichkeiten läßt sich leicht durch die Betrachtung der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit bestimmen; wenn man sich z. B. vornimmt, 2 mal hinter einander die Zahl 6 zu werfen, indem man 2 mal mit demselben Würfel wirft, so heißt dieß nichts anders, als das Zusammentreffen zweier Ereignisse verlangen, deren einfache Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ist. Man findet demnach für

---

*) Die in diesem § aufgelöste Aufgabe enthält die Grundlage für die Ausmittelung der Wahrscheinlichkeiten, a posteriori § 81, und verdient daher genau gemerkt zu werden. U.

die verlangte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (§. 17.). Auf gleiche Art ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit kein mal 6 zu werfen $= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten ist nicht $= 1$, weil außer diesen beiden Fällen auch noch der statt finden kann, 6 nur auf den ersten oder nur auf den zweiten Wurf zu treffen, die Wahrscheinlichkeit des erstern dieser Fälle ist $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ und die des letztern $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. Die Summe aller 4 Wahrscheinlichkeiten zusammen genommen beträgt

$$\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = \frac{36}{36} = 1.$$

Anstatt die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Fälle, die aus den auf einander folgenden Würfen desselben Würfels entstehen, auf obige Art eine nach der andern zu berechnen, kann man sie alle auf einmal mittelst einer einzigen Formel erhalten. Man braucht zu diesem Endzweck nur zu bedenken, daß wenn es bei einem Versuche m Fälle giebt, die A hervorbringen und n die B geben, bei der Zahl

$$(m + n)(m + n) = (m + n)^2$$

welche alle mögliche Verbindungen von 2 Versuchen in sich begreift, m^2 Fälle seyn werden, welche AA, mn die AB, nm die BA und n^2 die BB geben. So daß für die zusammengesetzten Fälle

AA, AB, BA, BB,

die respectiven Wahrscheinlichkeiten seyn werden

$$\frac{m^2}{(m+n)^2}, \quad \frac{mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{nm}{(m+n)^2}, \quad \frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

Läßt man die Ordnung der einzelnen Fälle unbeachtet, so geben die Verbindungen AB und BA nur einen einzigen zusammengesetzten Fall, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{2mn}{(m+n)^2}$ ist, so daß es also nur 3 zusammengesetzte Fälle

AA, AB, BB

deren Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{m^2}{(m+n)^2}, \frac{2mn}{(m+n)^2}, \frac{n^2}{(m+n)^2}$$

sind, geben wird. Die Zähler dieser Brüche sind die Glieder der entwickelten zweiten Potenz des Binoms $m+n$, und ihre Summe ist $= 1$.

Auf gleiche Art findet man die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für eine beliebige Anzahl von Versuchen durch die entwickelte Reihe von

$$(m+n)^p = m^p + \frac{p}{1} m^{p-1} n + \frac{p(p-1)}{1.2} m^{p-2} n^2$$

$$\ldots\ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots q} m^{p-q} n^q \ldots\ldots$$

$$+ n^q.$$

das erste Glied m^p zeigt die Anzahl der möglichen Fälle, unter p Versuchen p mal den Fall A zu treffen. Das zweite Glied $\frac{p}{1} m^{p-1} n$ giebt die Anzahl der Fälle unter p Versuche $p-1$ mal A und 1 mal B in unbestimmter Ordnung zu treffen.

Das allgemeine Glied

$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots q} m^{p-q} n^q$ giebt die Anzahl Fälle, bei welchen $p-q$ mal A und q mal B in unbestimmter Ordnung getroffen werden.

Wollte man eine bestimmte Ordnung berücksichtigen, so müßte der Coefficient weggelassen und nur $m^{p-q} n^q$ gesetzt werden.

Theilt man jedes dieser Glieder durch die Gesammtzahl aller möglichen Fälle, nämlich durch $(m+n)^p$, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten für jede der Folgen der einfachen Ereignisse, denen die Glieder entsprechen.

§. 21.

Um diese Behauptung unmittelbar zu beweisen, braucht man nur durch

$$m' \text{ und } n', \; m'' \text{ und } n'', \; m''' \text{ und } n''' \text{ rc.}$$

die Fälle zu bezeichnen, in welchen A und B bei dem ersten, zweiten und dritten Versuche rc. hervorgebracht werden, und die Producte zu entwickeln

$$(m'+n')(m''+n''); \; (m'+n')(m''+n'')(m'''+n''') \text{ rc.}$$

Das erste giebt

$$m'm''+m'n''+n'm''+n'n''$$

Das zweite

$$m'm''m'''+m'm''n'''+m'n''m'''+m'n''n'''+n'm''m'''+n'm''n'''+n'n''m'''+n'n''n''' \text{ rc.}$$

Nach dem §. 17. gesagten, drückt jedes Glied dieser Producte die Anzahl der Fälle aus, bei welchen das aus den einfachen Ereignissen A und B zusammengesetzte vorkömmt, so daß A so oft als m und B so oft als n in dem Gliede enthalten wiederholt wird. Die Striche bezeichnen überdies die Ordnung, in welcher sie auf einander folgen. Z. B. die Glieder (bei drei Versuchen)

$$\left.\begin{matrix} m'm''n''' \\ m'n''m''' \\ n'm''m''' \end{matrix}\right\} \text{entsprechen die Folgen} \left\{\begin{matrix} AAB \\ ABA \\ BAA \end{matrix}\right.$$

Setzt man nun $m' = m'' = m''' = m$ und $n' = n'' = n''' = n$ wodurch

$$(m' + n')\ (m'' + n'')\ (m''' + n''') \text{ in } (m + n)^3$$

verwandelt wird, so werden die oben angegebenen Glieder dem Ausdrucke m^2n gleich, eine Zahl, die die relativen Fälle eines jeden dieser drei Ereignisse genau bezeichnet, wenn die Ordnung der einfachen Ereignisse, aus welchen sie zusammengesetzt sind, festgesetzt ist.

Läßt man die Ordnung unberücksichtigt, so bilden sie sämmtlich nur ein einziges Ereigniß, welchem jeder Fall der Summe aller also von $3m^2n$ entspricht, ein Ausdruck der von m^2n nur durch den Coefficienten, welchen er bei der Entwicklung von $(m+n)^2$ erhält, verschieden ist. Es ist leicht einzusehen, daß man bei jeder beliebigen Anzahl von Versuchen zu gleichen Resultaten gelangt.

§. 22.

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{m}{m+n} = e, \frac{n}{m+n} = 1 - e = f,$$

so verwandelt sich die Reihe

$$\frac{m^p}{(m+n)^p} + \frac{p}{1}\frac{m^{p-1}n}{(m+n)^p} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{m^{p-2}n^2}{(m+n)^p} + \text{rc.}$$

welche die Wahrscheinlichkeiten aller der verschiedenen zusammengesetzten Ereignisse, die bei p Versuchen vorkommen können, in sich begreift (§. 10.), in:

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} e^{p-2} f^2 \ldots\ldots$$

$$+ \frac{p(p-1) \ldots\ldots (p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot q} e^{p-q} f^q \ldots\ldots + f^p$$

eine Formel, in welcher jedes einzelne Glied, die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses ausdrücket, bei welchem A so oft wiederholt wird, als der Exponent von e anzeigt, und B so oft als der Exponent von f angiebt.

Gewöhnlich giebt man nicht bestimmt die Anzahl der Wiederholungen eines und desselben Ereignisses an, sondern man setzt nur gewisse Gränzen fest. So z. B. wenn man die Wahrscheinlichkeit sucht, daß unter p Versuchen nicht weniger als p — 1 mal A hervorgebracht werde. Unter dieser Bedingung ist auch der Fall begriffen, wenn A, p mal hervorgebracht wird, und es entsprechen daher dieser Bedingung die beiden ersten Glieder obiger Formel. Die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse wird daher ausgedrückt durch

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f,$$

also durch die Summe der beiden ersten Glieder.

Auf gleiche Art zeigt die Summe der 3 ersten Glieder

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} e^{p-2} f^2$$

die Wahrscheinlichkeit an nicht weniger als p — 2 mal A und nicht mehr als 2 mal B zu erhalten.

Und im allgemeinen zeigt die Summe der Glieder von dem ersten an bis zu dem, in welchen $e^{p-q} f^q$ vorkömmt, nämlich:

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f \ldots\ldots + \frac{p(p-1)\ldots\ldots(p-q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,q} e^{p-q} f^q$$

die Wahrscheinlichkeit, nicht weniger als $p-q$ mal A und nicht mehr als q mal B zu erhalten.

Soll z. B. die Wahrscheinlichkeit gefunden werden unter 4 Würfen mit demselben Würfel, die 6 wenigstens 2 mal zu treffen, so ist

$$e = \frac{1}{6},\; f = \frac{5}{6},\; p = 4$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$e^4 + 4\,e^3 f + 6\,e^2 f^2 = \frac{1}{6^4} + 4\,\frac{1\,.\,5}{6^4} + 6\,\frac{1\,.\,25}{6^4} =$$

$$\frac{1 + 20 + 150}{1296} = \frac{171}{1296} \text{ zwischen } \frac{1}{7} \text{ und } \frac{1}{8}$$

Würde blos verlangt einmal die 6 zu werfen, so müßte man die Summe der 4 ersten Glieder von der entwickelten Reihe $(e+f)^4$ nehmen; da aber $e+f=1$ und daher auch $(e+f)^4=1$, so ist die Summe der 4 ersten Glieder $=1-f^4$, es ist daher auch leichter f^4 zu bestimmen, und es von der Einheit abzuziehen. Hierdurch wird erhalten

$$1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

als gesuchte Wahrscheinlichkeit, und da diese größer als $\frac{1}{2}$ ist, so folgt, daß es wahrscheinlich ist, unter 4 Würfen wenigstens einmal die 6 zu werfen (§. 9.)

Die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses ist $f^4 = \frac{625}{1296}$, weil das Glied f^4, in welchem e nicht vorkömmt, die bloße Wiederholungen von B anzeigt. Wir haben hiernach die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch die ihr

entgegengesetzte bestimmt, und man muß immer so verfahren, wenn die Ausdrücke der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit die einfachern sind.

§. 23.

Aus obigem Beispiele ergiebt sich auch, wie die Wahrscheinlichkeit 6 wenigstens einmal zu werfen, die für den ersten Versuch nur $\frac{1}{6}$ ist, durch wiederholte Würfe wächst. Diese Veränderung veranlaßt folgende Frage: die Anzahl der erforderlichen Versuche zu bestimmen, damit ein Ereigniß eine bestimmte Wahrscheinlichkeit erhalte? Wäre z. B. die Frage: in wieviel Würfen mit demselben Würfel eine Wahrscheinlichkeit $= g$ erhalten wird, daß 6 wenigstens einmal falle, so ist $e = \frac{1}{6}$, $f = \frac{5}{6}$, $q = p - 1$, und man muß p durch die Bedingung bestimmen, daß

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f \ldots\ldots \frac{p}{1} e f^{p-1} = g$$

werde, was nicht unmittelbar, sondern nur durch mehrere Versuche geschehen kann. Nimmt man aber die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, die durch das einzige Glied f^p ausgedrückt ist, und die bei den angenommenen Voraussetzungen $= 1 - g = k$ seyn muß, so erhält man die Gleichung

$$f^p = k \text{ und folglich } p \,\mathrm{Log.}\, f = \mathrm{Log.}\, k,\ p = \frac{\mathrm{Log.}\, k}{\mathrm{Log.}\, f}.$$

Substituirt man hier für f und k die Brüche $\frac{n}{s}$ und $\frac{r}{t}$ so findet man

$$p = \frac{\mathrm{Log.}\, \frac{r}{t}}{\mathrm{Log.}\, \frac{n}{s}} = \frac{\mathrm{Log.}\, t - \mathrm{Log.}\, r}{\mathrm{Log.}\, s - \mathrm{Log.}\, n}$$

Ich will diese Formel auf die Aufgabe anwenden, die die erste gewesen zu seyn scheint, die die Geometer gelöst haben. Nämlich: die Anzahl der Würfe mit 2 Würfeln zu finden, bei welchen es eben so wahrscheinlich ist, zwei Sechsen zu treffen als nicht. In diesem Beispiele ist

$$k = \frac{1}{2},\ e = \frac{1}{36},\ f = \frac{35}{36}\ (\text{§. } 7.) \text{ und daher } p =$$

$$\frac{\text{Log } 2}{\text{Log } 36 - \text{Log } 35} = 24{,}6.$$

Woraus sich ergiebt, daß dieses Ereigniß weniger wahrscheinlich ist, als sein entgegengesetztes, wenn man nur 24 mal wirft, und wahrscheinlicher, wenn 25 mal geworfen wird. Diese Folgerung schien dem Chevalier de Méré, der diese Aufgabe Pascal vorlegte, und dadurch dessen Nachdenken auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung lenkte, falsch. Dieser Chevalier, ein Mann von Geist, aber unbewandert in der Mathematik, glaubte, weil 4 Würfe hinreichen, um eine Wahrscheinlichkeit, die größer ist als $\frac{1}{2}$, zu erhalten, 6 mit einem Würfel zu werfen, der doch nicht mehr als 6 Fälle für jeden Wurf darbietet, so müßte bei dem Wurf mit 2 Würfel, die 36 oder 6.6 Fälle enthalten, 6 mal 4 oder 24 Würfe hinreichen, um dasselbe Resultat verhältnißmäßig für das Ereigniß 6 und 6 zu erhalten. Das Entgegengesetzte schien ihm ein großes Aergerniß, und veranlaßte ihn laut zu behaupten, daß die Arithmetik in ihren Voraussetzungen trüglich sey. (Lettre de Pascal a Fermat, OEuvres de Pascal t. IV. p. 419.)

Die durch den Chevalier de Méré aufgeworfene Schwierigkeit ist nicht die einzige, welche man gegen die Schätzung der Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen gemacht hat. Sie beruhet nur auf seiner Unwissenheit in der Mathematik, wodurch er veranlaßt wurde, Zahlen als

proportionirt anzusehen, die es nicht seyn können; aber d'Alembert wollte die Grundsätze selbst in Zweifel ziehen. Die Auseinandersetzung und Widerlegung eines einzigen seiner Einwürfe wird hinreichen, um sie alle zu würdigen; denn sie haben die Zustimmung auch nicht von einem einzigen bedeutenden Geometer erhalten, und beweisen blos, daß es auch den berühmtesten Männern begegnen kann, sich in einem selbst sehr einfachen Gegenstande zu irren.

Nach d'Alembert ist die Wahrscheinlichkeit bei dem Wurfe einer Münze, deren beide Seiten ich mit A und B bezeichnen will, daß die Seite A unter 2 Würfen wenigstens einmal zu oberst zu liegen kommen werde, nicht größer als $\frac{2}{3}$, anstatt der $\frac{3}{4}$, die man nach §. 20. erhält. Denn, sagt er, trifft man A das erste mal, so ist das Spiel beendet, und trifft man im Gegentheil B, so muß noch das zweite gespielt werden, in welchem A oder B zu oberst fällt, so daß nur einer von den 3 Fällen A, BA, BB, von welchen 2 gewinnen, vorkommen können.*)

Dieß ist allerdings wahr, aber der Irrthum besteht darin, daß er den beiden letzten Fällen, dieselbe Möglichkeit, wie dem ersten zuschreibt. Dieser Irrthum ist von gleicher Art mit dem §. 19. angeführten.

Eigentlich ist die Wahrscheinlichkeit A beim ersten Wurf zu treffen $\frac{1}{2}$, so wie die für B, aber die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Ereignisse BA und BB, die nur bei dem zweiten Wurf vorkommen können, ist vor dem ersten Wurfe $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Daher hat der Spieler, welcher wettet, wenigstens einmal A zu treffen, eine Wahrscheinlichkeit für sich von

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Eben so wie man erhalten würde, wenn man alle 4 An-

*) Opuscules Mathématiques de d'Alembert tom. II, pag. 20.

ordnungen bildete, welche die beiden mit einander Verbundenen Versuche darbieten. Nämlich:

AA, AB, BA, BB.*)

Im allgemeinen ist es augenscheinlich, daß eine gleiche Anzahl Fälle bei n aufeinander folgenden Würfen mit demselben Würfel, und bei einem gleichzeitigen Wurfe mit n gleichen Würfeln vorkommen. Es scheint nach den Briefen von Pascal an Fermat, daß er in einen, dem so eben angeführten, ähnlichen Irrthum gefallen sey.**)

§. 24.

Die Betrachtung der verschiednen zusammengesetzten Ereignisse, die bei den wiederholten Versuchen desselben Spiels sich zutragen können, verdient unsere ganze Aufmerksamkeit, weil sie, wie schon Jacob Bernoulli in dem vierten Theile der Ars conjectandi und hierauf Condorcet in seinen verschiedenen Schriften über Wahrscheinlichkeitsrechnung bemerkt hat, die beste Grundlage enthalten, die man der Philosophie dieser Rechnung geben kann, um die Nützlichkeit ihrer Anwendungen zu begründen.

Da die Glieder der entwickelten Reihe von $(m+n)^p$ die günstigen Fälle eines jeden der zusammengesetzten Ereignisse, die bei p Versuchen aus den verschiedenen Folgen (Ordnungen) der einfachen Ereignisse A und B entspringen, anzeigen, so ist es leicht auszumitteln, welches von diesen zusammengesetzten Ereignissen die meisten Fälle für sich hat und also das Wahrscheinlichste ist. Hierzu ist es hinreichend auszumitteln, wel-

*) Essai philosophique sur les Probabilités, pag. 13. der 3ten Ausgabe in 8.

**) OEuvres de Pascal tom. IV. p. 424.

ches von allen Gliedern der entwickelten Reihe von $(m+n)^p$ den größten Werth hat. Bevor wir zu der allgemeinen Bestimmung dieses Gliedes übergehen, wird es dienlich seyn, für die Leser, denen die Algebra nicht geläufig ist, einige numerische Beispiele zu geben.

Zuvörderst, wenn man $m=n$ sagt, ist das Glied das größte, welches die Mitte der Reihe einnimmt, wenn p eine gerade Zahl ist; und wenn p eine ungerade Zahl ist,*) kommen 2 aufeinander folgende Glieder von gleichem Werthe vor, die ebenfalls die Mitte der Reihe einnehmen, und von welchen jedes größer als jedes der übrigen Glieder ist, wie sich aus den folgenden entwickelten ersten Potenzen des Binoms $m+n$ ergiebt.

$$(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$$
$$(m+n)^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$$
$$(m+n)^4=m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3+n^4$$
$$(m+n)^5=m^5+5m^4n+10m^3n^2+10m^2n^2+$$
$$5mn^4+n^5$$

Die mittelsten Glieder $2mn$ und $6m^2n^2$ der zweiten und vierten Potenz, werden $2m^2$ und $6m^4$, wenn $m=n$, und sind die größten, weil sie von den übrigen nur durch ihre Coefficienten verschieden sind, von welchen jeder der größte in der Formel ist. Die Glieder $3m^2n$ und $3mn^2$, bei der dritten Potenz verwandeln sich in $3m^3$ und werden einander gleich, dasselbe ist in der 5ten Potenz bei den Gliedern $10m^3n^2$ und $10m^2n^3$ der Fall, die in $10m^5$ verwandelt werden, und den größten Coefficienten haben.

Hieraus folgt, daß bei der Untersuchung eines Spiels, wo die Zahl der Fälle für A und sein entgegengesetztes B gleich groß sind, die wahrscheinlichsten zusammengesetzte Ereignisse sich ergeben werden, wie folgt: 1 mal A und

---

*) Im Original ist hier gerade und ungerade Zahl verwechselt.
U.

1 mal B bei 2 Versuchen, 2 mal A und 2 mal B bei 4 Versuchen u. s. w. wenn eine gerade Anzahl von Versuchen gemacht werden. Ist die Zahl der Versuche aber ungerade, so kommen 2 zusammengesetzte Ereignisse von gleicher Wahrscheinlichkeit vor, die die Wahrscheinlichkeit aller übrigen an Größe übertreffen. Und zwar, das Ereigniß 2 mal A und 1 mal B oder 2 mal B und 1 mal A bei 3 Versuchen, 3 mal A und 2 mal B oder 3 mal B und 2 mal A bei 5 Versuchen und so fort.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser verschiedenen Ereignisse sind:

für 1 mal *A* und 1 mal B $\frac{2m^2}{(m+m)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

für 2 mal *A* und 2 mal B $\frac{6m^4}{(m+m)^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

für 2 mal *A* und 1 mal B
oder 1 mal *A* und 2 mal B $\Big\}\ \frac{3m^3}{(m+m)^3} = \frac{3}{8}$

für 3 mal *A* und 2 mal B
oder 2 mal *A* und 3 mal B $\Big\}\ \frac{10m^5}{(m+m)^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

Diese verschiedenen Wahrscheinlichkeiten nehmen ab, so wie die Anzahl der Versuche wächst, und dieses ist ganz natürlich, denn wenn gleich jede die größte von allen denen ist, die durch dieselbe Anzahl der Versuche hervorgehen, von welchen sie ein Theil ist, so entspricht sie doch nur einem einzigen der zusammengesetzten Ereignisse, die sich vermehren, so wie man eine größere Anzahl Versuche zuläßt.

Anders ist es bei den relativen Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen zusammengesetzten Ereignisse, die durch dieselbe Anzahl Versuche hervorgebracht werden. Z. B. die Wahrscheinlichkeit eher 1 mal *A* und 1 mal B als 2 mal *A* zu treffen, ist der Quotient, welcher entsteht, wenn man die absolute Wahrscheinlichkeit des ersten Falles durch die

Summe der Wahrscheinlichkeiten beider theilt §. 13. Also:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit eher 2 mal *A* und 2 mal B als 4 mal *A* nach einander zu treffen, findet man auf dieselbe Art:

$$=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{16}+\frac{3}{8}}=\frac{6}{7}$$

ein Bruch der größer als $\frac{2}{3}$ ist. Man wird immer ähnliche Resultate erhalten, wenn man die Rechnung weiter fortsetzt, und man wird daraus den Unterschied der Möglichkeit erkennen, zwischen den zusammengesetzten Fällen, die aus der beständigen Wiederholung ein und eben desselben Ereignisses bestehen, und der Möglichkeit des Falles, dessen Zusammensetzung sich am meisten dem Verhältniß nähert, in welchen die Wahrscheinlichkeiten der einfachen Ereignisse stehen.*) Die gesunde Vernunft allein reicht hin, diese Folgerungen zu ziehen, allein sie kann keine genauen Werthe geben, so wenig wie sie dem Chevalier de Méré zu der Beantwortung der Aufgabe, die er sich vorgelegt hatte, verhelfen konnte. Die Anwendung der Rechnung wird daher immer unerläßlich bleiben, wenn es darum zu thun ist, die aus verwickelten Operationen gefolgerten, oder in enge Grenzen eingeschlossenen Werthe zu bestimmen.

---

*) Der Unterschied zwischen der Wahrscheinlichkeit unter $n(a+b)$ Versuchen eben so oft mal A zu treffen, und der, bei diesen Versuchen na mal A und nb mal B zu treffen, wobei noch vorausgesetzt wird, daß die einfachen Wahrscheinlichkeiten von A und B zu einander sich wie $a:b$ verhalten, läßt sich mathematisch genau erst durch das §. 27. Angegebene bestimmen.

§. 25.

Die allgemeinen Formeln, die den Bemerkungen des vorhergehenden § entsprechen, ergeben sich von selbst, weil es blos darauf ankömmt, das Glied zu berechnen, das bei einer entwickelten geraden Potenz eines Binoms in der Mitte steht, oder die 2 mittlern Glieder, wenn die Potenz ungerade ist. Der Ausdruck für das erstere ist

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-\frac{p}{2}+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\frac{p}{2}}\,m^{\frac{p}{2}}\,n^{\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{p(p-1)\ldots(\frac{p}{2}+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\frac{p}{2}}\,m^{p}$$

weil $m=n$. Der für die andern ist

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-\frac{p-1}{2}+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\frac{p-1}{2}}\,m^{\frac{p+1}{2}}\,n^{\frac{p-1}{2}}$$

$$=\frac{p(p-1)\ldots(\frac{p+1}{2}+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,\frac{p-1}{2}}\,m^{p}$$

Um den Werth dieser Glieder zu berechnen, wenn p sehr groß ist, müßte man die Producte einer großen Anzahl Factoren bilden, was bald unthunlich wird, wenn man sich nicht durch die sehr merkwürdige von Stierling entdeckte Formel hilft, oder durch die, welche M. Laplace in den Memoires de l'Academie des Sciences 1781 und

1782, und in seiner Théorie analytique des Probabilités gegeben hat. Die erstere findet man in der Note 1. zu Ende dieses Werks.

Wendet man diese Formel bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, unter 100 Versuchen 50 mal *A* und 50 mal B zu treffen, so erhält man 0,0795892 eine Wahrscheinlichkeit, die an und für sich sehr klein ist, weil sie von 101 verschiednen möglichen Ereignissen nur ein einziges betrifft. Vergleicht man sie aber mit der Wahrscheinlichkeit 100 mal nach einander *A* zu treffen, so findet man

$$\frac{0{,}0795892}{(\frac{1}{2})^{100}+0{,}0795892} \text{ oder beinahe } 1-\frac{1}{2^{100}\times 0{,}0796}$$

was nicht merklich von der Einheit abweicht, weil der Nenner des von 1 abzuziehenden Bruchs aus 30 Ziffern besteht.

Dieses Resultat zeigt den ungemeinen Unterschied zwischen den respectiven Möglichkeiten der beiden Ereignisse, die ich so eben mit einander verglichen habe. Aber man muß auch beachten, daß die Wahrscheinlichkeit ohne Unterbrechung immer entweder *A* oder B zu treffen, kleiner ist, als jedes der anderen zusammengesetzten Ereignisse; diese werden desto größer, je mehr das entsprechende Glied sich dem mittlern nähert.

§. 26.

Sind nicht gleich viele Fälle zu Gunsten eines jeden der einfachen Ereignisse *A* und B, so wird doch das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniß noch immer das seyn, bei welchem die Wiederholungen von *A* zu denen von B in demselben Verhältniß stehen, in welchem die Zahl der für *A* günstigen Fälle zu der für B günstigen sich befindet.

Um diese Behauptung deutlicher zu machen, sey $m = 3$,

$n = 2$ und p nach und nach $= 5$, $= 10$. In dem ersten Falle ist das größte Glied der Reihe von $(m + n)^5$, gleich $10 m^3 n^2 = 1080$ und giebt $\frac{1080}{5^5} = \frac{1080}{3125}$ ungefähr $\frac{1}{3}$ als Wahrscheinlichkeit, bei 5 Versuchen 3 mal *A* und 2 mal B zu erhalten. Das größte Glied der Reihe von $(m + n)^{10}$ ist

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} m^6 n^4 = 210 m^6 n^4 = 210 \cdot 3^6 \cdot 2^4 = 2449440$$

wodurch erhalten wird

$$\frac{210 \cdot 3^6 \cdot 2^4}{5^{10}} = \frac{2449440}{9765625} \text{ ungefähr } \frac{2}{9}$$

als die Wahrscheinlichkeit unter 10 Versuchen 6 mal *A* und 4 mal B zu treffen, Zahlen, die in dem Verhältnisse von 3 zu 2 stehen. Diese Wahrscheinlichkeit ist geringer als die vorige aus der schon §. 24. angeführten Ursache, aber sie ist doch immer die größte hinsichtlich aller andern, die aus derselben Reihe sich ableiten lassen.

Nur die vielfachen von 5 können in 2 ganze Zahlen zerlegt werden, die zu einander in dem Verhältniß von 3 zu 2 stehen, die Reihen der Potenzen, deren Exponenten keine vielfachen von 5 sind, enthalten daher auch keine Glieder, in welchen die Exponenten von m und n dieses Verhältniß hätten. In diesen Fällen sind die Glieder die größten, deren Exponenten diesem Verhältnisse am nächsten kommen. Dieses ergiebt sich aus der algebraischen Bestimmung des größten Gliedes der Reihe von $(m + n)^p$.

§. 27.

Dem allgemeinen Gliede der Reihe von $(m + n)^p$ also dem Gliede

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots q}m^{p-q}n^q$$

geht das Glied

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(q-1)}m^{p-q+1}n^{q-1}$$

voraus, und dem allgemeinen Gliede folgt das Glied

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(q+1)}m^{p-q-1}n^{q+1}$$

Der Kürze wegen bezeichne man diese 3 Glieder in der angeführten Ordnung durch M, N und N′, so erhält man

$$\frac{M}{N}=\frac{p-q+1}{q}\cdot\frac{n}{m},\ \frac{M}{N'}=\frac{q+1}{p-q}\cdot\frac{m}{n}.$$

Soll nun das Glied M zugleich größer seyn als N und N′, so folgt

$$\frac{M}{N}>1,\ \frac{M}{N'}>1$$

und daher $\frac{p-q+1}{q}\cdot\frac{n}{m}>1,\ \frac{q+1}{p-q}\cdot\frac{m}{n}>1$

hieraus folgt

$$pn-qn+n>qm,\ qm+m>pn-qn$$

$$\text{also } q<\frac{pn+n}{m+n} \text{ und } >\frac{pn-m}{m+n}$$

q ist hiernach die ganze Zahl, welche zwischen den beiden letztern, deren Differenz $\frac{m+n}{m+n}=1$ beträgt, enthalten ist.

Setzt man $p=r(m+n)$, so folgt

$$q<rn+\frac{n}{m+n} \text{ und } >rn-\frac{m}{m+n}$$

folglich ist q die ganze Zahl rn und daher $p - q = rm$. Ferner ist es leicht zu zeigen, daß, indem man von dem Gliede M sich entfernt, alle Glieder beständig abnehmen, man mag dem ersten Gliede m^p sich nähern, oder dem letzten n^p. Denn das Verhältniß $\frac{p-q+1}{q} \cdot \frac{n}{m}$ des allgemeinen Gliedes, mit dem vorhergehenden verglichen, wird um desto größer, je kleiner q ist, also je näher man dem ersten Gliede kömmt, und es wird kleiner, indem q wächst, also indem man dem letzten Gliede sich nähert. Bezeichnet man daher mit L das Glied, welches N vorhergeht, und mit L′ das, welches N′ folgt, so ist, wenn man dem ersten Gliede sich nähert

$$\frac{M}{N} > 1, \ \frac{N}{L} > \frac{M}{N} \text{ ꝛc. folglich } M > N, \ N > L \text{ ꝛc.}$$

und nähert man sich dem letzten Gliede, so ist

$$\frac{N'}{M} < 1, \ \frac{L'}{N'} < \frac{N'}{M} \text{ ꝛc. also } N' < M; \ L' < N' \text{ ꝛc. *)}$$

---

*) $\frac{p-q+1}{q} \cdot \frac{n}{m}$ ist der allgemeine Factor, durch welchen, wenn man irgend ein Glied damit multiplicirt, das nächstfolgende (eigentlich qte Glied) erhalten wird. Da nun der Werth dieses Ausdrucks desto kleiner wird, je größer q ist, so muß nothwendigerweise von 3 unmittelbar auf einander folgenden Gliedern, der Quotient des 2ten Gliedes durch das erste getheilt größer seyn, als der des dritten durch das 2te getheilt. Bezeichnet man daher einige unmittelbar aufeinander folgende Glieder mit i, k, l, m, n, o, p, so ist

$$\frac{k}{i} > \frac{l}{k} > \frac{m}{l} > \frac{n}{m} > \frac{o}{n} > \frac{p}{o}$$

Ist nun m das größte aller Glieder, so folgt

$$\frac{m}{l} > 1 \text{ und daher auch } \frac{l}{k} > 1 \text{ und } \frac{k}{i} > 1$$

Da M das größte Glied der Reihe von $(m+n)^p$ ist, und die relative Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses, welchem dieses Glied entspricht, zu der eines andern dem z. B. K entsprechen mag, durch

$$\frac{M}{K+M} \text{ (§. 13.)}$$

ausgedrückt wird, so wird sich diese um so mehr der Einheit nähern, je kleiner K in Verhältniß zu M ist. Wodurch die §. 24. gemachte Bemerkung allgemein bewiesen ist, weil m und n willkührlich angenommen sind.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich also, daß von allen zusammengesetzten Ereignissen die bei $r(m+n)$ Versuchen vorkommen können, das Wahrscheinlichste in Vergleich zu jedem andern insbesondere, das ist, welches dem Gliede entspricht, in welchem die Potenzen $m^{rm} n^{rn}$ vorkommen und bei welchem die Ereignisse A und B, ersteres rm mal und letzteres rn mal, also im Verhältniß ihrer besondern Wahrscheinlichkeiten, wiederholt werden.

§. 28.

Es ergab sich auch, daß die absolute Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses immer geringer wird,

---

folglich $m > l > k > i$ ꝛc. Die Werthe der Glieder nehmen also immer ab, indem man dem ersten Gliede sich nähert.

Zu gleicher Zeit ist aber auch $\frac{n}{m} < 1$ daher um so mehr $\frac{o}{n} < 1$ und $\frac{p}{o} < 1$ folglich $m > n > o > p$ ꝛc. und die Werthe der Glieder müssen also auch, indem man dem letzten Gliede sich nähert immer während abnehmen.

so wie die Anzahl der Versuche wächst. Aber es giebt eine Wahrscheinlichkeit, die immerwährend zunimmt, nämlich die: daß die Zahlen, welche die Wiederholungen der einfachen Ereignisse *A* und B anzeigen, in Vergleich zu der Zahl aller Versuche, sich nicht über bestimmte Grenzen hinaus, von den Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse selbst, entfernen werden.

Wir wollen, mehrerer Deutlichkeit wegen, zuvörderst den Fall betrachten, wo für jedes einfache Ereigniß eine gleiche Anzahl günstiger Fälle möglich sind, und die Wahrscheinlichkeit für die Zusammensetzung ausmitteln, daß *A* nicht mehr als $\frac{3}{5}$ und nicht weniger als $\frac{2}{5}$ von der Anzahl aller Versuche treffen werde. Brüche zwischen welchen $\frac{1}{2}$, als die besondere Wahrscheinlichkeit der Ereignisse *A* und B, enthalten ist, und von welchen jene nur um $\frac{1}{10}$ verschieden sind. Nehmen wir nun blos 5 Versuche an, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit nicht mehr als 3 und nicht weniger als 2 mal *A* zu treffen, wenn man von der Reihe $(e+f)^5$ die Glieder

$$10e^3f^2 + 10e^2f^3 \quad (\S.\ 22.)$$

nimmt, und dabei $e = f = \frac{1}{2}$ setzt. Hierdurch wird $\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$ erhalten.

Wir wollen nun zu dem Falle übergehen, wenn 10 Versuche gemacht werden, wobei also *A* höchstens 6 und wenigstens 4 mal treffen muß. In diesem Falle müssen von der Reihe $(e+f)^{10}$ die Glieder

$$210e^6f^4 + 252e^5f^5 + 210e^4f^6$$

genommen werden, deren Werth sich auf $\frac{672}{1024} > \frac{5}{8}$, welches letztere nur $\frac{640}{1024}$ beträgt, beläuft. Dieses Wachsen der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist noch äußerst gering, aber es wird bedeutender, so wie die Anzahl der Versuche zunimmt. Nimmt man deren 100, wovon $\frac{3}{5} = 60$ und

$\frac{2}{5}=40$, so müssen von der Reihe $(e+f)^{100}$ alle Glieder genommen werden, von demjenigen an, in welchem $e^{60}f^{40}$ vorkömmt, bis zu dem, welches $e^{40}f^{60}$ enthält. Die Rechnung wird etwas kürzer, wenn man bei dem mittlern Gliede anfängt (§. 25.)

Bezeichnet man den Coefficienten dieses Gliedes mit C, durch C_1 den des nächstfolgenden, durch C_2 des hierauf kommenden und so fort, so bildet sich folgender Ausdruck:

$$C.e^{50}f^{50}+C.\tfrac{50}{51}e^{49}f^{51}+C_1.\tfrac{49}{52}e^{48}f^{52}\ldots.$$
$$+C_9.\tfrac{41}{60}e^{40}f^{60}$$

woraus man sieht, wie jedes Glied aus dem Vorhergehenden entsteht, wobei übrigens berücksichtiget werden muß, aß weil $e=f=\frac{1}{2}$

$$e^{50}f^{50}=e^{49}f^{51}\ldots\ldots=e^{40}f^{60}=2^{\frac{1}{100}}$$

Da nun die 10 Glieder die dem Gliede $Ce^{50}f^{50}$ vorhergehen, den ihm folgenden gleich sind, so ist es hinreichend, wenn man von den letztern das zwiefache nimmt, um auch die erstern mit in Rechnung zu bringen. Bedient man sich der Logorithmen, so findet man leicht, daß die gesuchte Summe ungefähr $\frac{96}{100}$ beträgt. Eine Wahrscheinlichkeit, die der Einheit sehr nahe kömmt.

Hätte man das Verhältniß der Zahl, wie oft *A* treffen soll, zu der Zahl aller Versuche in engere Grenzen eingeschlossen, so würde sich eine geringere Wahrscheinlichkeit ergeben haben. Wenn z. B. obiger Ausdruck nur von dem Gliede, welches $e^{55}f^{45}$ bis zu dem das $e^{45}f^{55}$ enthält, genommen wird, so sind die Grenzen $\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$ und $\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$, deren Unterschied von $\frac{1}{2}$ nur $\frac{1}{20}$ beträgt; aber in diesem Falle erhält man auch nur eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{73}{100}$.

§. 29.

Diese Resultate können durch bloßes Raisonnement nur gemuthmaßt werden; um mit Genauigkeit ihren Werth, und selbst ihre Natur zu bestimmen, bedarf man der Rechnung. Uebrigens muß man beachten, daß die Vergrößerung der Wahrscheinlichkeit, wenn die Anzahl der Versuche vermehrt wird, nur alsdann statt findet, wenn die Grenzen durch ein Verhältniß zwischen der Zahl aller Versuche und der der verlangten Ereignisse irgend einer Art angegeben sind, nicht aber durch bestimmte Differenzen für die letztere Zahl. *)

Sucht man z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß A nur einmal mehr oder weniger erhalten werde, als die Hälfte der Anzahl aller Versuche beträgt, so wird diese bei der Reihe von $(e+f)^{10}$ durch die Glieder erhalten, in welchen $e^6 f^4$, $e^5 f^5$ und $e^4 f^6$ vorkömmt, und für 100 Versuche durch die Summe der Glieder, die $e^{51} f^{49}$, $e^{50} f^{50}$ und $e^{49} f^{51}$ in der Reihe von $(e+f)^{100}$ enthalten, nämlich immer durch 3 Glieder. Diese Summe muß daher auch immer abnehmen. (§. 24.)

Wenn im Gegentheil die Grenzen durch $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$ in Verhältniß der Anzahl aller Versuche zu der des Ereignisses A bestimmt werden, so wächst die Zahl der Glieder, die die gesuchte Wahrscheinlichkeit enthalten, immer mehr. Man hat deren 2 für 5 Versuche, 3 für 10 und 21 für 100.

---

*) Dieses Zunehmen der Wahrscheinlichkeit findet nur statt, wenn die Grenzen durch geometrische Verhältnisse, nicht aber wenn sie durch arithmetische Verhältnisse angegeben sind. Im letztern Falle wird im Gegentheil die Wahrscheinlichkeit immerwährend geringer. U.

§. 30.

Alles, was sich bei den einzelnen Beispielen zeigte, geht aus einem Satze von der größten Wichtigkeit hervor, der zuerst durch Jacob Bernoulli bewiesen wurde, und wie folgt lautet: Man kann immer eine solche Anzahl von Versuchen angeben, daß durch sie eine sich der Gewißheit, so weit man nur immer will, nähernde Wahrscheinlichkeit erhalten wird, daß das Verhältniß der Zahl, die die Wiederholungen desselben Ereignisses anzeigt, zu der Zahl aller Versuche, sich nicht von der einfachen Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses über bestimmte Grenzen entfernen werde, man mag die Grenzen auch noch so beschränkt annehmen.

Ich werde diesen Satz beweisen, indem ich ungefähr denselben Weg einschlage, den Bernoulli genommen hat. $\frac{m}{m+n}$ sey die einfache Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A und p die Anzahl der Versuche, so wird $\frac{mp}{m+n}$ mal dieses Ereigniß erhalten werden, wenn es sich genau nach seiner einfachen Wahrscheinlichkeit wiederholt. Aber wir wollen annehmen, daß das Verhältniß anstatt genau $\frac{m}{m+n}$ zu seyn, nur zwischen den Brüchen $\frac{m+1}{m+n}$ und $\frac{m-1}{m+n}$ eingeschlossen sey, so daß unter p Versuchen nicht mehr als $\left(\frac{m+1}{m+n}\right)p$ und nicht weniger als $\left(\frac{m-1}{m+n}\right)p$ mal das Ereigniß A hervorgebracht werde; und damit die letztern ganze Zahlen seyn mögen, wollen wir $p = r(m+n)$ setzen, wodurch sie in $rm + r$ und in $rm - r$ sich verwandeln. Hiernach werden die $2r + 1$ Glieder in der

Reihe $(m+n)^{rm+rn}$ von denjenigen an, in welchem m den Exponenten $rm+r$ hat, bis zu demjenigen, wo der Exponent dieser Größe $rm-r$ ist, alle Fälle für diejenigen Ereignisse enthalten, deren Zusammensetzung innerhalb der bezeichneten Grenze eingeschlossen ist. Das größte Glied der Reihe befindet sich in der Mitte, der so eben angeführten, denn ihre Summe läßt sich vorstellen durch

$$\lambda m^{rm+r} n^{rn-r} \ldots\ldots + \mu m^{rm} n^{rn} \ldots\ldots$$
$$+ \lambda' m^{rm-r} n^{rn+r}$$

λ, μ und λ' sind die Coefficienten der Glieder, bei welchen sie stehen, und bezeichnet man die angeführten 3 Glieder durch L, M und L′, so erhält man

$$\frac{M}{L} = \frac{(rm+r)(rm+r-1)\ldots(rm+1)}{(rn-r+1)(rn-r+2)\ldots rn} \cdot \frac{n^r}{m^r},$$

$$\frac{M}{L'} = \frac{(rn+r)(rn+r-1)\ldots(rn+1)}{(rm-r+1)(rm-r+2)\ldots rm} \cdot \frac{m^r}{n^r}$$

der zweite Ausdruck unterscheidet sich von dem ersten nur dadurch, daß m und n ihre Stellen gewechselt haben.

§. 31.

Dieses vorausgesetzt, so muß zuvörderst gezeigt werden, daß der Werth des Verhältnisses $\frac{M}{L}$ so groß werden kann, als man es nur immer haben will, zu dieser Absicht müssen wir die Potenzen n^r und m^r in ihre Factoren zerlegen, um jedem Factor des Coefficienten einen dieser Factoren zuzutheilen. Hierdurch wird erhalten

$$\frac{M}{L} = \frac{rmn+rn}{rmn-rm+m} \times \frac{rmn+rn-n}{rmn-rm+2m} \ldots \times \frac{rmn+n}{rmn}.$$

Jeder dieser Factoren ist größer als 1, und ihre Anzahl $= r$ kann so groß werden, als verlangt wird, ihr Produkt wächst immerwährend.

Theilt man alle Glieder des ersten und des letzten Factors durch r, so erhalten sie die Form

$$\frac{mn + n}{mn - m + \frac{m}{r}}, \quad \frac{mn + \frac{n}{r}}{mn}$$

woraus sich ergiebt, daß die Größe

$$\frac{mn + n}{mn} = \frac{m + 1}{m}$$

ihrem Werthe nach zwischen diesen beiden Factoren enthalten ist.

Es ist aber immer möglich, den Werth einer Zahl q so anzunehmen, daß $\left(\frac{m+1}{m}\right)^q$ gleich oder größer ist, als eine gegebene Zahl c; denn setzt man

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^q = c$$

und bedient sich der Logarithmen, so findet man

$$q\,(\text{Log.}\,(m + 1) - \text{Log.}\,m) = \text{Log.}\,c$$

$$\text{folglich } q = \frac{\text{Log.}\,c}{\text{Log.}\,(m + 1) - \text{Log.}\,m}$$

Ist dieser Werth von q ein Bruch, so nimmt man die nächstfolgende ganze Zahl für denselben.

Hiernach kann man es so einrichten, daß der qte Factor in dem Werth von $\frac{M}{L}$ dem Ausdrucke $\frac{m+1}{m}$ gleich wird. Dazu zu gelangen, braucht man nur zu setzen

$$\frac{rmn + rn - (q - 1)\,n}{rmn - rm + qm} = \frac{m + 1}{m}$$

und r zu bestimmen. Diese Gleichung wird

$$\frac{rmn + rn - (q-1)n}{rn - r + q} = m + 1$$

und giebt

$$r = q + \frac{qn-n}{m+1},\ r(m+n) = \left\{q + \frac{qn-n}{m+1}\right\}(m+n).$$

Bei diesem Werthe von r übersteigen die $q-1$ Factoren zur Linken, im Ausdrucke von $\frac{M}{L}$, den Werth $\frac{m+1}{m}$, welcher dem qten Factor zukömmt, das Produkt, wenn die erstern mit den letztern multiplicirt werden, übersteigt daher nothwendigerweise den Werth $\left\{\frac{m+1}{m}\right\}^q$ also auch die Zahl c. Da endlich die folgenden Factoren sämmtlich größer als 1 sind, so muß das vollständige Produkt oder der Werth von $\frac{M}{L}$ um so mehr größer seyn, als die Zahl c.

Durch das Vorhergehende ist die Zahl r so bestimmt, daß wenn man das Binomium $m+n$ auf die Potenz $r(m+n)$ erhebt, das Verhältniß $\frac{M}{L}$ größer als jede beliebige gegebne Zahl wird.

Um das zweite Verhältniß $\frac{M}{L'}$ auf gleiche Art zu bestimmen, ist es nach dem am Schlusse des §. 30. bemerkten hinreichend, in obige Formeln m und n gegenseitig zu verwechseln. Hierdurch erhält man

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}^q = c,\ q = \frac{\text{Log. } c}{\text{Log. }(n+1) - \text{Log. } n},$$

$$r = q + \frac{qm - m}{n+1},\ r(r + n) =$$

$$\left\{q + \frac{qm - m}{n+1}\right\}(m + n).$$

Ist dieser Werth von r von dem obigen verschieden, was gewöhnlich der Fall ist, so nimmt man den größten von beiden, wodurch zu gleicher Zeit

$$\frac{M}{L} \text{ und } \frac{M}{L'} > c.$$

§. 32.

Von dem im vorhergehenden § Auseinandergesetzten ausgehend, hat Jacob Bernoulli gezeigt, daß die Summe der r zwischen M und L einschlüßlich enthaltenen Glieder, so groß man nur immer will, werden kann, in Verhältniß zu der Summe der r Glieder links von L oder gegen das erste Glied der Reihe zu. Denn bezeichnet man durch F, G, H rc. die zwischen M und L enthaltenen Glieder, so daß man von M gegen L zählt, und ferner durch P, Q, R rc., die, welche L vorhergehen, indem man dem 1ten Gliede m^{rm+rn} zuzählt, so ist, weil das Verhältniß der aufeinander folgenden Glieder immer mehr und mehr wächst, wenn man bei M anfangend gegen die Linke zu zählt. (§. 27.)

$$\frac{M}{F} < \frac{L}{P},\ \frac{F}{G} < \frac{P}{Q},\ \frac{G}{H} < \frac{Q}{R}\ \text{rc.}$$

und daher $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$

und folglich $\frac{M}{L} < \frac{F + G + H + \text{rc.}}{P + Q + R + \text{rc.}}$

$$= \frac{\frac{F}{P}\,P + \frac{G}{Q}\,Q + \frac{H}{R}\,R + \text{2c.}}{P + Q + R + \text{2c.}}$$

Es folgt hieraus, das der Werth von r, durch welchen $\frac{M}{L} > c$ um so mehr giebt

$$\frac{F + G + H + \text{2c.}}{P + Q + R + \text{2c.}} > c \text{ und}$$

$$F + G + H + \text{2c.} > c\,(P + Q + R + \text{2c.})$$

Nun hat das Glied M, in welchem $m^{rm}\,n^{rn}$ vorkömmt, rn Glieder vor sich, und L, welches r Stellen vor M steht, hat folglich $rn - r$ oder $r(n-1)$ Glieder vor sich, die in $(n-1)$ Abtheilungen zerlegt werden können, von welchen jede r Glieder enthält, und bei welchen dieselbe Unterordnung statt findet, wie die bei den Gliedern F, G 2c. links zwischen M bis L und den Gliedern P, Q 2c. links von L in der Abtheilung, die mit dem letztern anfängt, angegebene. Setzt man daher $c = i\,(n-1)$ welches giebt

$$F + G + H + \text{2c.} > i\,(n-1)\,(P + Q + R + \text{2c.})$$

so übersteigt der Theil i von der ersten Abtheilung, die zweite $(n-1)$ mal genommen, also um eben so viel mal, so viele Abtheilungen noch vorkommen, von welchen jede kleiner als die ihr vorhergehende ist, wenn man bei M anfängt. Man kann daher mit Recht behaupten, daß die erste Abtheilung, die Summe aller übrigen wenigstens i mal übersteigt.

Man kann auf gleiche Art beweisen, wenn man $c = i\,(m-1)$ setzt, daß die Summe der Glieder von M excl. bis L′ die $(m-1)$ Abtheilungen von r Gliedern, welche von L′ bis zum letzten Gliede der Reihe auf der rechten Seite enthalten sind, i mal an Werth übersteigen

wird, wenn $\frac{M}{L'} > i(m-1)$. Weil nun die Größe von i durch nichts begrenzt ist, so kann die Summe der Glieder von L bis L′ incl., dem Werthe der ganzen Reihe $(m+n)^{r(m+n)}$ so nahe gebracht werden, als man nur immer will. Hiernach ist es möglich, den Werth des Ausdruckes

$$\frac{\lambda m^{rm+r} n^{rn-r} \ldots\ldots + \lambda' m^{rm-r} n^{rn+r}}{(m+n)^{r(m+n)}}$$

welcher die Wahrscheinlichkeit angiebt, unter $r(m+n)$ Versuchen nicht mehr als $r(m+1)$ und nicht weniger als $r(m+1)$ mal das Ereigniß A zu treffen, der Einheit so nahe zu bringen, als man nur immer will, wobei das Verhältniß der Zahlen, die die Wiederholungen von A und die Anzahl aller Versuche ausdrücken, innerhalb der Grenzen

$$\frac{m+1}{m+n} \text{ und } \frac{m-1}{m+n}$$

eingeschlossen ist.

§. 33.

Diese Brüche, obgleich dem Anscheine nach bestimmt, können doch so enge Grenzen, als nur immer gefordert werden, angeben; denn setzt man $m = sm'$, $n = sn'$, so verwandeln sie sich in

$$\frac{sm'+1}{s(m'+n')} = \frac{m'+\frac{1}{s}}{m'+n'}, \quad \frac{sm'-1}{s(m'+n')} = \frac{m'-\frac{1}{s}}{m'+n'}$$

und zugleich erhält man

$$r(m+n) = rs(m'+n')$$

und der Ausdruck für die im vorhergehenden § angezeigte Wahrscheinlichkeit erhält die Form

$$\frac{\lambda m'^{rsm'+r} n'^{rsn'-r} \ldots\ldots + \lambda' m'^{rsm'-r} n'^{rsn'+r}}{(m'+n')^{r(sm'+sn')}}$$

wobei der dem Zähler und Nenner gemeinschaftliche Factor $s^{r(sm'+sn')}$ weggelassen ist.

Eben so kann man im Gegentheil die Grenzen erweitern, wenn man $m = \frac{m'}{s}$ und $n = \frac{n'}{s}$ setzt, woraus folgt

$$\frac{m+1}{m+n} = \frac{m'+s}{m'+n'}, \quad \frac{m-1}{m+n} = \frac{m'-s}{m'+n'} \text{ und}$$

$$r(m+n) = \frac{r}{s}(m'+n').$$

§. 34.

Jacob Bernoulli wendet seine Formeln auf den Fall an, wo $m' = 3$, $n' = 2$, er setzt hiernach $m = 30$, $n = 20$, und sucht die erforderlichen Versuche um eine Wahrscheinlichkeit die wenigstens $= \frac{1000}{1001}$ zu erhalten, daß das Verhältniß der Zahl der Wiederholungen von A zu der Anzahl aller Versuche in den Grenzen $\frac{31}{50}$ und $\frac{29}{50}$ eingeschlossen seyn werde. In diesem Beispiele muß $i = 1000$ gesetzt werden, substituirt man hierauf in den Formeln des §. 31. $i(n-1)$ statt c, für die Glieder von M bis L, so ergiebt sich

$$q = \frac{\text{Log.}\, i(n-1)}{\text{Log.}(m+1) - \text{Log.}\, m} = \frac{4278753\,6}{142405} < 301$$

$$r(m+n) = q(m+n) + \frac{qn-n}{m+1}(m+n) < 24728$$

und setzt man $c = i(m-1)$ für die Glieder von M bis L', so folgt

$$q = \frac{\text{Log. } i(m-1)}{\text{Log. }(n+1) - \text{Log. } n} = \frac{4462398o}{211893} < 211$$

$$r(m+n) = q(m+n) + \frac{qm-m}{n+1}(m+n) =$$

25550.

diese letztere, als die größere Zahl muß genommen werden. Macht man daher 25550 Versuche, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Grenzen $\frac{31}{50}$ und $\frac{29}{50}$ größer als $\frac{1000}{1001}$.

Jacob Bernoulli mittelte auch die erforderlichen Versuche aus, welche den Wahrscheinlichkeiten wenigstens von $\frac{10000}{10001}$ und von $\frac{100000}{100001}$ entsprechen, und fand, indem er

$$i = 10000 \text{ und } i = 100000$$

setzte, die Zahlen

31258 und 36966

woraus sich ergiebt, daß die Wahrscheinlichkeit selbst schneller wächst, als die Zahl der Versuche. Diese nehmen im gegenwärtigen Beispiele um die beständige Differenz 5708 zu.

§. 35.

Da schon die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältniß der Zahl der Wiederholungen von A zu der Anzahl aller Versuche in den Grenzen

$$\frac{m+1}{m+n} \text{ und } \frac{m-1}{m+n} \text{ oder } \frac{sm'+1}{s(m'+n')} \text{ und } \frac{sm'-1}{s(m'+n')}$$

eingeschlossen seyn wird, der Einheit, so nahe man nur immer will, gebracht werden kann; so muß dies um so mehr für die Wahrscheinlichkeit der Fall seyn, daß dieses Verhältniß nicht geringer als

$$\frac{m-1}{m+n} \text{ oder } \frac{sm'-1}{s(m'-n')}$$

seyn wird (für den Fall, wo das Verhältniß nur auf einer Seite begrenzt ist), denn um die letztere dieser Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, müssen zu den Gliedern, die die erstern bilden, noch alle die hinzugethan werden, die dem Gliede $\lambda m^{rm+r} n^{rn-r}$ vorhergehen, d. h. mit der Reihe $(m+n)^{r(m+n)}$ vergleichen, die Summe aller Glieder vom ersten m^{rm+rn} an bis zu dem Gliede $\lambda' m^{rm-r} n^{rn+r}$ einschlüßlich.

Folgerungen aus der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

§. 36.

Ich habe in den vorläufigen Bemerkungen auseinander gesetzt, wie der Begriff der Wahrscheinlichkeit in unserm Geiste durch den Einfluß entsteht, den die Wiederholungen der zum Hervorbringen ein und ebendasselbe Ereignisses günstigen Urtheile bewirken. Ein Einfluß, dem man unmöglich ausweichen kann, wenn diese Wiederholung vielmal statt hat, so daß hieraus eine mathematische Wahrscheinlichkeit entsteht, die der Einheit sehr nahe kömmt; und ich habe zu gleicher Zeit bemerkt, daß die Rechnung diesem Fall, noch den einer bei weitem geringern Wahrscheinlichkeit hinzufügt. (§. 5.) Dahin führt auch der von Jacob Bernoulli aufgestellte Satz (§. 30.), so wie ihn Condorcet anführt, indem er mit vielem Scharfsinn und sehr löblicher Absicht die Natur der Wahrscheinlichkeit erörterte. Man sehe den Discours préliminaire seiner Essai sur l'Application de l'analyse à la probabilité des décisions. Er hat diese Theorie auf folgende 3 Sätze zurückgeführt:

1. Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses größer als $\frac{1}{2}$, so hat man mehr Ursache zu glauben, daß dieses Ereigniß geschehen, als daß es nicht geschehen werde.

2. Je mehr die Wahrscheinlichkeit sich vermehrt, um desto mehr wächst auch der Grund zu glauben.

3. Er wächst im gleichen Verhältnisse mit dieser Wahrscheinlichkeit. (Siehe pag. VII. des angeführten Werkes.)

§. 37.

Der erste dieser Sätze entspringt unmittelbar aus dem Bernoullischen, denn vermehrt man so viel als erforderlich ist die Versuche, so kann man zu einer der Einheit so nahe man nur immer will kommenden, Wahrscheinlichkeit gelangen, daß das Verhältniß der Zahl der Wiederholungen eines Ereignisses zu der Anzahl aller Versuche in Grenzen eingeschlossen seyn wird, die der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses so nahe liegen, als nur immer verlangt werden kann. Hieraus folgt, daß wenn diese letztere Wahrscheinlichkeit auch nur wenig über $\frac{1}{2}$ beträgt, es so wahrscheinlich, als man will, werden kann, daß die Zahl der Wiederholungen dieses Ereignisses mehr als die Hälfte der Anzahl aller Versuche betragen wird. Seine Wiederholungen werden also häufiger seyn, als die des entgegengesetzten Ereignisses, und man wird ihm daher eine größere Möglichkeit zuschreiben müssen, und indem die Rechnung diese Möglichkeit von der einfachen Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ableitet, so wird dadurch die Folgerung unterstützt, nämlich die öftere Wiederholung desselben Ereignisses, über eine Wahrscheinlichkeit, die man nach Belieben steigern kann.

Nehmen wir z. B. ein Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{101}{200}$ beträgt, so können, indem man sie in dem gleichen Bruch $\frac{1010}{2000}$ verwandelt, nach §. 34. die erforderlichen Versuche berechnet werden, um die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß nicht weniger als 1009 unter

2000 mal zutreffen werde, auf $\frac{1000000}{1000001}$ zu bringen. Das Uebergewicht dieses Ereignisses über das entgegengesetzte, obgleich an und für sich sehr gering, weil nur unter 200 ein einziger günstiger Fall mehr statt findet, kann dessen ungeachtet auf eine Wahrscheinlichkeit gebracht werden, die der gleich ist, aus einer Urne, die 1000000 weiße Kugeln und eine schwarze enthält, eine weiße Kugel zu ziehen.

Auf eine sehr strenge Rechnung also, gründet sich die Behauptung zu Ende des §. 5. und die dem Worte Wahrscheinlich in §. 9. beigelegte Bedeutung. Der Umstand, den dieses Wort ausdrückt, ist in der That merkwürdig, weil jede ungleiche Theilung in der Zahl der Fälle irgend eines Zufalls, durch die Wiederholung der entgegengesetzten Ereignisse eine Ungleichheit hervorbringt, deren Wahrscheinlichkeit sich nach und nach, so weit man will, der Gewißheit nähern kann.

Der durch eine solche Wahrscheinlichkeit geleitete Glaube bringt also die Nothwendigkeit hervor, an eine weit geringere Wahrscheinlichkeit zu glauben, und setzt zugleich den Sinn und Werth des Grundes fest. Wenn bei jedem Versuche für sich betrachtet die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nur wenig größer ist, als die des Gegentheils, so wird der Grund, eher zu glauben, daß es geschehen als daß es nicht geschehen werde, sehr schwach bleiben; zieht man dabei aber eine große Anzahl von Versuchen in Betracht, so giebt die Entwickelung aller Verbindungen, die diese Versuche mit sich führen, denen, in welchen die einfachen Ereignisse in Verhältnissen, die sich ihren Wahrscheinlichkeiten nähern, vorkommen, das Uebergewicht über alle andern. Die Anzahl der Versuche, und also beinahe immer die Zeit, müssen also nothwendig bei der Werthbestimmung des Grades von Zutrauen, den man der mathematischen Wahrscheinlichkeit geben muß, in Betracht gezogen werden. Daher kömmt es, daß es gegen die Klugheit ist, sich ohne Noth einem Zufalle auszusetzen, den

man nicht sehr viel mal versuchen kann. Diese Regel, die schon die gesunde Vernunft eingiebt, nimmt hier den Charakter einer mathematischen Wahrheit an, deren Wichtigkeit durch die Rechnung festgesetzt ist, und sie wird in der Folge die Mittel an die Hand geben, genau und unserm wahren Interesse angemessen, die verschiedenen Speculationen zu würdigen, die man auf ungewisse Begebenheiten machen kann.

§. 38.

Der zweite Satz §. 36. folgt unmittelbar aus dem so eben gesagten. Der Grund, das wirkliche Zutreffen eines Ereignisses zu glauben, muß mit der Wahrscheinlichkeit desselben wachsen; denn wächst diese, so bedarf man weniger Versuche, um eine große Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß das Verhältniß der Zahl der Wiederholungen dieses Ereignisses zu der Anzahl aller Versuche nicht außerhalb der festgesetzten Grenze fallen wird; oder nimmt man eine gleiche Anzahl von Versuchen und behält dieselben Grenzen bei, so erhält man eine größere Wahrscheinlichkeit für diese Grenzen. Oder endlich, bleibt die Anzahl der Versuche dieselbe, so entspricht dieselbe Wahrscheinlichkeit einer höhern Grenze, d. h. sie wird eine größere Anzahl Wiederholungen des Ereignisses anzeigen, und folglich eine größere Möglichkeit für das Hervorbringen desselben, als Folge der vermehrten einfachen Wahrscheinlichkeit.

§. 39.

Was den dritten Satz §. 36. anbelangt, so scheint er für sich evident, sobald man eingesehen hat, daß der Grund, an das Hervorbringen eines Ereignisses zu glauben, sich mit der Wahrscheinlichkeit desselben vermehrt, und diesem noch beifügt, daß dieser Grund auf die Wiederholung der

Urtheile der Möglichkeit §. 6. und 7. sich stützt. Er läßt sich auch unmittelbar aus den Rechnungen des Jacob Bernoulli ableiten; denn 1) da bei jeder beliebigen Anzahl von Versuchen das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniß das ist, in welchem jedes einfache Ereigniß nach Verhältniß seiner Wahrscheinlichkeit wiederholt wird, und 2) durch das Vermehren der Versuche man die Wahrscheinlichkeit der Einheit so nahe bringen kann, als man nur immer will, daß das Verhältniß der Zahl der Wiederholungen dieses Ereignisses zu der Anzahl aller Versuche sich immer weniger von seiner Wahrscheinlichkeit entfernen werde, nämlich von dem Verhältniß der Zahl, der seinem Hervorbringen günstigen Urtheile zur Gesammtzahl der Urtheile, die überhaupt über alles, was bei diesem Zufalle geschehen kann, gefällt werden können §. 6., so ist es natürlich, dieses letztere Verhältniß als Maaßstab der Möglichkeit für das bezeichnete Ereigniß anzunehmen, oder den Grund für den Glauben, daß es zutreffen werde, danach zu schätzen; und man ist dazu gezwungen, sobald man den Einfluß zugesteht, den eine große Wahrscheinlichkeit auf unsere Meinung haben kann.

§. 40.

Die Betrachtung der durch die Gesetze der Combinationen hervorgebrachten mathematischen Verbindung zwischen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und der Zahl der Wiederholungen desselben, nach Maaßgabe, wie die Versuche vermehrt werden, leitete Jacob Bernoulli zuerst auf die Möglichkeit, die Beobachtung vergangener Ereignisse bei der Bestimmung zukünftiger, auf eine unbestreitbare Art anwenden zu können, und so der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen weit wichtigern Zweck zu geben, als den, das Benehmen der Spieler zu regeln, zu welchem Zwecke er

sie zuvor erfunden hatte.*) Bernoulli verglich die Ereignisse, deren Ursache unbekannt ist, den wiederholten Zügen aus einer Urne, die, weil nach jedem Zuge die Kugel wieder hineingeworfen wird, eine immer gleiche aber unbekannte Anzahl weiße und schwarze Kugeln enthält; diese Hypothese stützt sich darauf, daß die Gesammtzahl der natürlichen Ereignisse als unendlich angesehen werden kann, die sich daher durch das wirkliche Geschehen einiger wenigen dieser Ereignisse nicht merklich vermindert. Er legte sich hiernach die Frage vor: Ob, wenn man die Beobachtungen ohne Unterlaß vermehrt, die Wahrscheinlichkeit das wahre Verhältniß zwischen der Zahl der Fälle, in welchen ein Ereigniß zutrifft, und den, wo das Gegentheil statt findet, zu erhalten, bis über eine gewisse Grenze steigern könne?**) Die Auflösung dieser Aufgabe, die er als die schwerste und wichtigste von allen, die man über diesen Gegenstand haben kann, ansah, behielt er 20 Jahre lang unter seinen Papieren. Ihre Nützlichkeit wird durch obige Betrachtungen meines Erachtens außer allen Zweifel gesetzt. Bernoulli aber gieng weiter, denn er hatte sich, wie aus obiger Aufgabe hervorgeht, den Zweck vorgesetzt dahin zu gelangen, die Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten bloß aus den Beobachtun-

---

*) Dieses ist der Gegenstand des 4ten Theils der Ars conjectandi, dieses hinterlassene 1713 gedruckte Werk enthält schon die Grundsätze einer Philosophie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, aber sie gerieth fast gänzlich in Vergessenheit, bis Condorcet sie wieder hervorsuchte, vervollkommte und erweiterte. —

**) Bernoulli bedient sich hier des Ausdruckes: „daß die Wahrscheinlichkeit einen Grad der Gewißheit übersteige," und will damit nichts anders als Wahrscheinlichkeit bezeichnen, die er, da sie ein Bruch ist und die Einheit Gewißheit vorstellt, als einen Theil der letztern ansieht.

gen, also a posteriori, zu erkennen, um so auf die Autorität der Rechnung die Inductionen zu stützen, die man aus der Wiederholung der Erscheinungen abnehmen kann. So verwechselt er, wie sich aus dem zweiten Abschnitte dieses Werkes ergeben wird, die Art Wahrscheinlichkeiten a posteriori zu schätzen mit ihrer Bestimmung a priori, oder durch Kenntniß der Combinationen; der Unterschied der Resultate dieser beiden Verfahrungsarten aber, wird desto geringer, je größer die Zahl der Beobachtungen ist. Man kann sich ihrer bedienen, um die eine durch die andere zu prüfen.

Da die Bernoullischen Formeln zeigen, daß bei einer langen Reihe von Versuchen über denselben Zufall, die Vertheilung der einfachen Ereignisse ohne Unterlaß strebt sich dem durch ihre Wahrscheinlichkeit angezeigten Verhältnisse zu nähern, so bestimmen sie auch die Bedingungen der Urne, aus welchen die beobachteten Ereignisse hervorgehen, mit einer immer größer werdenden Wahrscheinlichkeit, und knüpfen zahlreiche Wiederholungen desselben Ereignisses, an der Einheit sehr nahe kommenden Wahrscheinlichkeiten, so daß der Glaube an die Wiederkehr dieser Ereignisse durch die Rechnung eben so wie durch die Gewohnheit geleitet wird, aber alsdann durch Gründe, deren Werth sich schätzen läßt.

§. 41.

Indem Condorcet, so wie ich es so eben gethan habe, auf die vorerwähnten Sätze von der Wahrscheinlichkeit sich stützt, glaubt er bemerken zu müssen, daß doch „kein direktes und nothwendiges Verhältniß zwischen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und seiner Wirklichkeit statt finde,“ (Siehe pag. x des §. 36. angeführten Discours) und, um es zu beweisen, sagt er, obgleich der Zufall über ein Ereigniß schon entschieden hätte, so würde diese Ent-

scheidung doch nicht durch das Uebergewicht der Wahrscheinlichkeit, in Bezug auf alle, die nur die Bedingungen des Spieles kennen, und über das, was wirklich geschehen ist, in Unwissenheit sich befinden, entspringen. Zieht man z. B. aus einer Urne die 1000 weiße Zettel, und einen schwarzen enthält einen dieser Zettel und faltet ihn zusammen, nachdem man seine Farbe erkannt hat, um ihn jemand zu zeigen, der bei dem Zuge nicht gegenwärtig war, so wird dieser von dem Zettel nichts anders behaupten können, als die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Zettel weiß sey, betrage $\frac{1000}{1001}$, und daß er schwarz sey nur $\frac{1}{1001}$, dessen ungeachtet aber ist eins dieser beiden Ereignisse für diejenigen gewiß, die den Zettel entfaltet haben, daher kann ein Ereigniß, das für diese Personen gewiß ist, für jene doch nur einen geringen Grad von Wahrscheinlichkeit haben; die Unwissenheit über das, was geschehen ist, setzt hier Wahrscheinlichkeit an die Stelle der Gewißheit, und da sie den Verstand in denselben Umständen läßt, in welchen er vor der Ziehung war, so kann das Urtheil nur auf die bekannten Bedingungen der Urne Bezug haben. Aber was Condorcet nicht angeführt hat, ist, daß die Person, welche die Ziehungen nicht gesehen hat, sie mag nun vor oder nach denselben, wenn anders diese gewissenhaft geschehen, über das Ereigniß urtheilen, immer dieselbe Wahrscheinlichkeit haben wird, sich bei einer gegebenen Anzahl von Ziehungen nicht über eine gegebne Anzahl mal im Urtheilen zu irren; so daß die Verbindung der Wahrscheinlichkeit mit der Wiederholung der Ereignisse in diesem Falle eben so ihre ganze Stärke behält, wie in jedem andern. Und nur auf dieser Verbindung beruhen alle rechtmäßigen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 42.

Bevor ich diese Bemerkungen beendige, will ich wiederholen, daß, wenn die verschiednen Fälle bei einem Spiele

streng genommen von gleicher Möglichkeit sind, sowohl was die Construction der Spielwerkzeuge anbelangt, als auch die Art und Weise sich deren zu bedienen, so haben die vergangenen Ereignisse keinen Einfluß auf die folgenden. Wenn man übrigens nach wiederholten Versuchen ein auffallendes Wiederkommen in dem Erscheinen gewisser Fälle bemerkt, so hat man Grund zu glauben, daß die Einrichtung der Instrumente oder die Geschicklichkeit dessen, der sich ihrer bedient, dieses Wiederkommen verursache; die Untersuchung dieser Wahrscheinlichkeit aber gehört zu den der Wahrscheinlichkeiten a posteriori.

Hat man Grund einige Ungleichheiten dieser Art zum Voraus zu argwöhnen, so ist es natürlich, bald die Wiederholung desjenigen Ereignisses zu erwarten, das zuerst eintraf, weil man glauben muß, daß das Wahrscheinlichere eher zu treffen werde, als jedes andere. Es ist auch nicht schwer zu bemerken, daß jede Ungleichheit unter den Wahrscheinlichkeiten die Wiederholungen der einen begünstigen müsse; es ist dieses nichts anders, als eine aus dem Bernoullischen Satze hervorgehende Folgerung, die der gesunde Menschenverstand hinlänglich bewährt. Die Würdigung der Wirkung dieser Ungleichheit kann auf folgende ganz einfache Art geschehen.

Es sey e die genaue Wahrscheinlichkeit, die dem Ereignisse A nach den Bedingungen des Spiels zukömmt, und e′ der Unterschied mehr oder weniger zwischen dieser Wahrscheinlichkeit und der wirklich statt findenden, so ist die Wahrscheinlichkeit n mal A zu treffen, die eigentlich e^n seyn sollte $= (e + e')^n$, wenn die Ungleichheit zu Gunsten dieses Ereignisses ist, und $(e - e')^n$, wenn sie zum Nachtheil desselben statt hat. Weiß man aber bloß daß diese Ungleichheit statt hat, ohne zu wissen, in welchem Sinne sie genommen werden muß, und betrachtet beide Fälle als gleich möglich, so ist die Wahrscheinlichkeit der Wiederholungen für die erste Hypothese $= \frac{1}{2}(e + e')^n$

und für die zweyte $= \frac{1}{2}(e-e')^n$, und die ganze Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2}(e+e')^n + \frac{1}{2}(e-e')^n = e^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{n-2} e'^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e^{4-4} e'^4 + \text{rc.}$$

eine Reihe, in welcher alle Glieder positiv sind, diese Wahrscheinlichkeit übersteigt daher die ursprüngliche von e^n. Ein ähnliches Resultat findet man auch für die Wahrscheinlichkeit der Wiederholungen des entgegengesetzten Ereignisses, die durch die Reihe von $\frac{1}{2}(f-e')^n + \frac{1}{2}(f+e')^n$ ausgedrückt wird.

Die Vermehrung dieser Wahrscheinlichkeiten, die in beiden Fällen statt hat, ist durch die Verkürzung der zusammengesetzten Ereignisse gewonnen, die aus den beiden entgegengesetzten bestehen, wie sich leicht zeigen läßt. Bei 2 Versuchen z. B. verwandelt sich die Wahrscheinlichkeit $2ef$ für die Combination AB in

$$\frac{1}{2} \cdot 2(e+e')(f-e') + \frac{1}{2} \cdot 2(e-e')(f+e') = 2ef - 2e'^2 \text{ *)}$$

Beispiele über die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit *a priori*.

§. 43.

Montmort in seiner Analyse des Jeux de hasard und hierauf Moivre in der Doctrine of Chan-

*) Diese letztern Bemerkungen sind aus der Théorie analytique des Probabilités par La place pag. 185—186 entlehnt.

ces *) haben eine Menge Aufgaben über Hazardspiele gelößt; aber es liegt nicht in meinem Plane, mich lange bei dieser Gattung von Fragen aufzuhalten, weil der größte Theil derselben weitläufige Auseinandersetzungen erfordern, um die Bedingungen der Spiele, die sie behandeln, kennen zu lernen, überdies sind mehrere dieser Spiele ganz aus der Mode gekommen, und fast allen unbekannt, die ihre Zeit den Wissenschaften widmen. Die Beispiele, die ich meinen Lesern mitzutheilen für nöthig erachte, werden solche Aufgaben betreffen, die aus den einfachen Combinationen sich ergeben und auf allgemeine Formeln gebracht werden können, und die dazu dienen, einen Begriff von den verschiedenen Verfahrungsarten bei der Anwendung der Rechnung auf diesen Zweig der Mathematik zu geben.

Zuvörderst soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß, indem man zufällig in einen Haufen von m Stücken greift, man eine gerade oder eine ungerade Anzahl derselben ergreifen wird? Diese Aufgabe kann als Beispiel dienen, wie nöthig es ist, dem ersten Anschein zu mißtrauen. Scheint es nicht natürlich zu glauben, die ganze Auflösung hänge nur von der Menge der graden und ungeraden Zahlen ab, die von 1 bis m einschließlich enthalten sind? Wäre m z. B. 5, so könnte man sagen, da hier 3 ungerade Zahlen 1, 3, 5 und 2 gerade 2, 4 vorkommen, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Anzahl Stück $\frac{3}{5}$ und für eine gerade $\frac{2}{5}$; und wäre $m = 4$, so würde folgen, weil hier 2 ungerade und 2 gerade Zahlen vorkommen, daß beide Wahrscheinlichkeiten einander gleich und jede $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ beträgt.

Es ist dem aber nicht so, denn betrachtet man diesen Gegenstand mit Aufmerksamkeit, so ergiebt sich, daß die

*) Das erste dieser Werke hat zwei Auflagen, von welchen die letzter 1713 erschienen ist, das zweite englisch geschriebene Werk hat 3 Auflagen, und die letzte ist von dem Jahre 1756.

Stücke nach den verschiedenen möglichen Arten, nach welchen sie in Verbindung mit einander vorkommen können (also nach den verschiedenen möglichen Combinationen) ergriffen werden können, nicht aber nach den verschiedenen Arten, nach welchen die Zahl der Stücke dieses Haufens in 2 Theile sich zerlegen lassen. Um dieses zu zeigen, wollen wir die Stücke durch a, b, c, d bezeichnen; diese können zu ungeraden Zahlen entweder zu 1 oder zu 3 verbunden werden, wodurch die 8 Combinationen erhalten werden

a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd

und zu geraden Zahlen entweder zu 2 oder alle 4 zusammen, was die 7 Combinationen giebt

ab, ac, ad, bc, bd, cd, abcd.

Für jede dieser Verbindungen ist es gleich möglich, daß sie ergriffen wird. Hieraus folgt, daß die Wahrscheinlichkeit eine ungerade Anzahl Stücke zu ergreifen $\frac{8}{15}$, und die daß eine gerade Anzahl Stücke ergriffen werden, nur $\frac{7}{15}$ beträgt.

Erinnert man sich, daß die Coefficienten der Glieder in der Reihe von $(x+a)^m$, wenn man mit dem zweiten Gliede anfängt, die Anzahl der Combinationen von m Dingen geben zu 1, zu 2, zu 3 ꝛc. genommen, so erhält man

$$\frac{m}{1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ꝛc.} = I,$$

für die Gesammtzahl der Combinationen in ungeraden Zahlen und

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ꝛc.} = P$$

für die Combinationen in geraden Zahlen, addirt man beide Ausdrücke, so erkennt man in ihrer Summe leicht alle Glieder der Reihe von $(1+1)^m$, außer dem ersten Gliede: daher folgt

$$I+P=(1+1)^m-1=2^m-1.$$

Zieht man den erstern Ausdruck von dem letztern ab, so erhält man

$$P-I=(1-1)^m-1=-1$$

woraus man endlich findet

$$I=2^{m-1},\ P=2^{m-1}-1$$

und folglich, wenn man die Wahrscheinlichkeit eine ungerade Anzahl Stücke zu ergreifen durch e, und die für eine gerade Anzahl durch f ausdrückt

$$e=\frac{2^{m-1}}{2^m-1},\ f=\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}\ *)$$

---

*) m verschiedne Dinge geben auch $m=\frac{m}{1}$ mögliche Fälle, wenn je 1 genommen wird. Sollen diese Dinge aber zu 2 verbunden werden, so muß man jedes dieser m Dinge mit jedem der übrigen $m-1$ verbinden, wodurch also $\frac{m}{1}(m-1)$ Combinationen erhalten werden. Da hierbei aber das Ding a mit dem Dinge b zuerst, wenn a mit allen übrigen verbunden wird, unter der Form ab vorkömmt, und hierauf, wenn man b mit allen übrigen verbindet, unter der Form ba, beide aber (wenn auf die Ordnung der Verbindung nicht Rücksicht genommen wird) denselben Fall anzeigen, so ist die Summe aller möglichen verschiedenen Combinationen zu $2=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$. Sollen hieraus die Combinationen zu 3 gefunden werden, so muß man jede der Verbindungen zu 2 mit den noch übrigen

Die erstere dieser Wahrscheinlichkeiten ist immer größer als die letztere, ihre gemeinschaftliche Grenze aber ist immer,

---

$m-2$ verbinden, folglich werden $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-2)$ Combinationen erhalten. Unter den Combinationen zu 2 aber kommen jede beliebige 3 Dinge a, b, c unter $\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}=3$ verschiedne Formen vor, nämlich ab, ac, bc daher erhält man unter den Combinationen zu 3 für jede 3 Dinge folgende 3 Formen abc, acb und bca, die nicht verschieden von einander sind. Die sämmtlichen verschiedenen Combinationen zu 3 betragen daher $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$

Nimmt man an, daß dieses Gesetz noch für die Verbindungen zu p gelte, so daß die Summe dieser Verbindungen $=$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-(p-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,p}$$

so werden die Combinationen zu $p+1$ erhalten, wenn man jede dieser Combinationen mit den noch übrigen $m-p$ Dingen verbindet, weil aber $p+1$ Dinge zu p genommen

$\frac{(p+1)p(p-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,(p-1)p}=p+1$ verschiedne Formen geben, von welchen jede eine Form zu $p+1$ giebt, wenn man zu ihr das noch übrige Ding hinzu thut, so folgt, daß unter den nach obigen erhaltenen Verbindungen zu $p+1$ immer $p+1$ Combinationen von gleicher Form vorkommen müssen. Die Anzahl aller verschiedenen Combinationen zu $p+1$ ist daher

$$\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,(m-(p-1))\,(m-p)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,p\,(p+1)}$$

folglich gilt obiges Gesetz allgemein.

Da ferner $(1\pm1)^m=$

$$1\pm\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\text{ꝛc.}$$

so folgt hieraus die Richtigkeit der Gleichungen

$$I+P=2^m-1$$
$$P-I=-1$$

U.

wenn die Zahl m als unendlich angesehen werden kann, $\frac{1}{2}$. Obige Rechnungen sind aus einer Abhandlung des seligen Bertrand aus Genf, die er der Academie der Wissenschaft in Paris im Jahre 1786 vorlegte, die aber nicht gedruckt ist, entnommen. Die Frage kann auch durch die Rechnung mit Differenzen (calcul aux differences) gelößt werden. Siehe Note II. zu Ende dieses Werkes.

§. 44.

Die einfachen Wahrscheinlichkeiten der bei der Lotterie de France vorkommenden Fälle hängen nur von den Coefficienten des 2ten – 6ten Gliedes der Reihe der Potenzen des Binoms ab, und ihre Berechnung ist so leicht, daß ich mich jetzt dabei nicht aufhalten will, besonders da ich bei Vergleichung der Einsätze und Gewinne darauf zurückkommen werde.*)

Die Auflösung der folgenden Aufgabe, über dieselbe Lotterie, ist etwas schwieriger.

---

*) Die Lotterie de France hat im Wesentlichen dieselbe Einrichtung wie die deutschen Zahlenlotterien. Sie besteht aus 90 Nummern, von welchen 5 gezogen werden, und enthält daher

$\frac{90}{1}$ . . . . . Auszüge

$\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2}$ . . . Amben oder Combinationen zu 2

$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ . . Ternen 3

$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ Quaternen 4

$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ Quinternen 5

und diese Zahlen sind die Coefficienten des 2ten bis 6ten Gliedes der Reihe von $(a+b)^{90}$.

U.

Von den im Rade befindlichen 90 Nummern werden bei jeder Ziehung 5 gezogen, die Wahrscheinlichkeit, daß eine besetzte Nummer heraus kommen werde, ist daher $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$; nun hat jemand 2 Nummern besetzt, und es soll die Wahrscheinlichkeit ausgemittelt werden, daß wenigstens eine von diesen beiden Nummern heraus kommen wird? Die Antwort hierauf ist nicht $\frac{2}{18}$, denn wäre dies, so müßte man, wenn 18 Nummern besetzt werden, eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{18}{18}$ oder die Gewißheit erhalten, daß eine von 18 Nummern heraus kommen müßte, was absurd ist. — Eine jede Ziehung ist eine Combination von 5 beliebigen Nummern der 90, aus welchen die Lotterie besteht, sie kann daher auf

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

verschiedne Arten statt haben, unter diesen sind alle die Fälle günstig, bei welchen eine der besetzten Nummern oder auch alle beide vorkommen.

Um die erstern zu erhalten, muß man alle Combinationen zu 4 von den 88 Nummern nehmen, die verschieden von den besetzten sind, und jeder dieser Verbindungen, die besetzten eine nach der andern hinzufügen. Dieses giebt

$$2 \cdot \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$ günstige Combinationen.

Nimmt man nun ferner von denselben 88 Nummern alle Combinationen zu 3, und fügt jeder derselben die beiden besetzten zu, so erhält man noch

$$\frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$ günstige Combinationen,

werden nun die beiden letztern Ausdrücke durch den erstern getheilt, und dabei die dem Divisor und Divident gemein-

schaftlichen Factoren hinweggelassen, so findet man

$$\frac{85}{9 \cdot 89} + \frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{87}{9 \cdot 89} = \frac{87}{801} < \frac{1}{9}$$

§. 45.

Schließt man auf ähnliche Art bei einer Lotterie, die aus p Nummern besteht, von welchen bei jeder Ziehung q gezogen werden, um die Wahrscheinlichkeit auszumitteln, daß unter s besetzten Nummern t herauskommen werden, so muß man zuvörderst alle mögliche Combinationen der p—s übrigen Nummern zu q—t verbunden berechnen, dieses giebt

$$\frac{(p-s(p-s-1)\ldots(p-s-(q-t)+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(q-t)}$$

und hierauf, weil die s besetzten Nummern sich zu t auf

$$\frac{s(s-1)\,.\,.\,.\,.\,(s-t+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,t}$$

verschiedene Arten verbinden lasse, diese beiden Ausdrücke mit einander multipliciren, um die Zahl der dem verlangten Ereignisse günstigen Fälle zu erhalten. Die Zahl aller möglichen Fälle wird durch die sämmtlichen Combinationen der p Nummern, aus welchen die Lotterie besteht, zu q genommen erhalten. Sie ist =

$$\frac{p(p-1)\ldots\ldots(p-q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,q}$$

und daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{(p-s)(p-s-1)\ldots(p-s-(q-t)+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(q-t)} \times$$

$$\frac{s(s-1)\ldots.(s-t+1)}{1\;.\;2\;\ldots..\;t} \times \frac{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;q}{p(p-1)\ldots.(p-q+1)}$$

diese Formel läßt sich noch abkürzen, wenn man die dem Divisor und Divident gemeinschaftlichen Factoren

$1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;(q-t)$ wegläßt.

Lautet die Frage nicht so, daß genau eine bestimmte Anzahl der besetzten Nummern herauskommen sollen, sondern nur daß nicht weniger als die Anzahl h herauskommen sollen, so muß man nach und nach an die Stelle von t die Zahlen

$$h,\; h+1,\; h+2\;.\;.\;.\;.$$

bis q setzen, wenn $s > q$ oder bis s, wen $q > s$.

§. 46.

Nimmt man z. B. es habe jemand 18 Nummern besetzt, so findet man leicht, wenn man das so eben angegebene Verfahren befolgt, folgende Wahrscheinlichkeiten: daß keine dieser Nummern herauskommen wird,

$$\frac{72.71.70.69.68}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5} \times \frac{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}{90.89.88.87.86} = 0{,}3184,$$

daß von diesen Nummern herauskommen

Eine; $\dfrac{72.71.70.69}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4} \times \dfrac{18}{1} \times \dfrac{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}{90.89.88.87.86} = 0{,}4213,$

Zwei; $\dfrac{72.71.70}{1.2.3} \times \dfrac{18\;.\;17}{1\;.\;2} \times \dfrac{1\;.\;2\;.\;3\;.\;5}{90.89.88.87.86} = 0{,}2076,$

Drei; $\dfrac{72.71}{1.2} \times \dfrac{18.17.16}{1.2.3} \times \dfrac{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}{90.89.88.87.86} = 0{,}0475,$

Vier; $\frac{72}{1} \times \frac{18.17.16.15}{1.2.3.4} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0{,}0050,$

Fünf; $\frac{18.17.16.15.14}{1.2.3.4.5} \times \frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = 0{,}0002,$

die Summe der fünf letztern Wahrscheinlichkeiten, oder was einfacher ist, die Differenz der ersten von der Einheit $= \frac{6016}{10000}$ giebt die Wahrscheinlichkeit, daß von 18 besetzten Nummern wenigstens eine heraus kommen wird.

§. 47.

Huygens, einer der ersten Geometer, die sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigten, beschloß sein Werk De Ratiociniis in ludo aleae (Opera varia tome IV. pag. 727.) mit 5 Aufgaben, von welchen er bei vieren nur die Zahlen der Auflösung angegeben hat, und der zweiten hat er dem Satze nur folgendes beigefügt: Drei Spieler A, B und C legen 12 Marken zusammen, und zwar 4 weiße und 8 schwarze, sie kommen überein, daß derjenige von ihnen, der zuerst mit verbundenen Augen eine weiße Marke ergreifen wird, gewinnen soll. A greift zuerst, alsdann B und hierauf C, es soll nun die Wahrscheinlichkeit ausgemittelt werden, die jeder für sich hat. Dieser Satz veranlaßte Montmort und Moivre*) zu zwei verschiedenen Deutungen. Ersterer glaubte daß die gezogene Marke jedesmal wider zu dem Haufen gethan werden müßte, so daß die Wahrscheinlich-

*) Siehe Analyse des hasards de Montmort pag. 364, die Miscellanea analytica de Moivre pag. 199. und die Ars conjectandi von Jacob Bernoulli pag. 57.

keit bei jedem Versuche dieselbe blieb, Moivre aber glaubte das Gegentheil, und in diesem Sinne, wodurch die Aufgabe etwas verwickelter wird, löste er sie auf eine sehr einfache Art mittelst der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten wie folgt.

Es sey m die Anzahl der weißen Marken und n die der schwarzen, so ist bei dem ersten Zuge, wo die Anzahl der Marken von jeder Farbe noch vollständig ist, die Wahrscheinlichkeit, daß eine weiße Marke gezogen wird, wodurch A gewinnt $\frac{m}{m+n}$ und für das Ziehen einer schwarzen Marke $\frac{n}{m+n}$. Dieses letztere ist überhaupt die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Zug noch wird geschehen können, bei welchem die Zahl der schwarzen Marken um die vermindert ist, die der Spieler A gezogen hat, ihre Zahl beträgt daher $n-1$. Folglich sind die Wahrscheinlichkeiten in diesem Zuge

$\frac{m}{m+n-1}$ für eine weiße Marke

$\frac{n-1}{m+n-1}$ für eine schwarze.

Diese müssen mit der besondern Wahrscheinlichkeit des Zuges selbst multiplicirt werden, um die der beiden Ereignisse zu erhalten, die hieraus sich ergeben können. (§. 17.) Dieses giebt die Wahrscheinlichkeiten

$\frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}$ zu Gunsten für B

$\frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1}$ gegen B,

also als Wahrscheinlichkeit, daß der dritte Zug überhaupt noch statt finden wird.

Zieht B eine schwarze Marke, so bleiben davon nur noch n — 2 im Haufen, und schließt man für diesen Zug, wie für den vorhergehenden, so findet man die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \cdot \frac{m}{m+n-2} \text{ zu Gunsten für C,}$$

$$\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \cdot \frac{n-2}{m+n-2} \text{ gegen C,}$$

also die Wahrscheinlichkeit, daß noch ein vierter statt finden wird.

Zieht auch C eine schwarze Marke, so kömmt der Zug von neuem an A bei einem Haufen, der nur noch n — 3 schwarze Marken enthält, er hat daher die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} \cdot \frac{m}{m+n-3} \text{ zu gewinnen,}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} \cdot \frac{n-3}{m+n-3} \text{ zu verlieren.}$$

Fährt man so fort und setzt der Kürze wegen $m+n=t$, so findet man die Reihe

$$\frac{m}{t},\ \frac{mn}{t(t-1)},\ \frac{mn(n-1)}{t(t-1)(t-2)},\ \frac{mn(n-1)(n-2)}{t(t-1)(t-2)(t-3)},$$

$$\frac{mn(n-1)(n-2)(n-3)}{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)},$$

$$\frac{mn(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)} \text{ ꝛc.}$$

in welcher das 1te, 4te, 7te ꝛc. Glied die Wahrscheinlichkeiten zu Gunsten des Spielers A, das 2te, 5te, 8te

ꝛc. die Wahrscheinlichkeiten zu Gunsten des Spielers B, und endlich das 3te, 6te, 9te ꝛc. die Wahrscheinlichkeiten zu Gunsten des Spielers C ausdrücken. Es ist augenscheinlich, daß das Spiel am spätesten endet, wenn die Anzahl der schwarzen Marken erschöpft ist, weil nachher keine Ungewißheit mehr statt findet, welcher von den Spielern gewinnen wird, und daß die ganze Wahrscheinlichkeit für jeden Spieler erhalten wird, wenn man die, welchem er bei jedem Zuge hat, summirt. Die Berechnung der Glieder in der angezeigten Reihe wird leicht erhalten, wenn man jedes Glied auf das vorhergehende zurückführt, wie ich §. 27. gethan habe.

Die von Huygens angenommenen Zahlen geben

$$m = 4 \quad n = 8 \quad t = 12$$

und man findet für den Spieler A die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8.7.6}{11.10.9} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8.7.6.5.4.3}{11.10.9.8.7.6}$$

für den Spieler B die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8.7.6.5}{11.10.9.8} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8.7.6.5.4.3.2}{11.10.9.8.7.6.5}$$

und für den Spieler C die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{8.7}{11.10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8.7.6.5.4}{11.10.9.8.7} +$$

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{11.10.9.8.7.6.5.4}$$

Bringt man diese Brüche sämmtlich auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, so werden obige Summen verhältnißmäßig

$$\frac{77}{165},\ \frac{53}{165},\ \frac{35}{165}$$

diese 3 Brüche sind zusammen der Einheit gleich.

§. 48.

Die wiederholten Versuche, welche der so eben gelößten Aufgabe zum Grunde liegen, sind von denen unterschieden, die ich §. 20. untersucht habe, weil hier die Zahl der Fälle bei jedem Versuche sich vermindert. Diese Gattung des Zufalls kann man nicht mit dem Wurfe der Würfel vergleichen, wohl aber mit dem Zuge aus einer Urne, wobei die jedesmal gezogne Kugel nicht wieder in die Urne geworfen wird. Die Formeln, die bei dieser Hypothese die Stelle der Reihe von den Potenzen des Binoms $m+n$ vertreten, sind merkwürdig genug, um hier angeführt zu werden, und ergänzen, was von den wiederholten Versuchen gesagt worden ist.

Eine Urne enthalte m weiße Kugeln und n schwarze, und man bezeichne das Herauskommen einer weißen Kugel mit A, und das einer schwarzen mit B, und setze der Kürze wegen $m+n=t$. Sieht man nun darauf, nach jedem Zuge 1 sowohl von der Anzahl aller Kugeln, als auch von der Anzahl derjenigen, die die Farbe der als gezogen angenommenen haben, abzuziehen, so wird man nach den Regeln der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten folgendes finden:

Beim 1ten Zuge:

für A, $\frac{m}{t}$ für B, $\frac{n}{t}$

Beim 2ten Zuge:

für AA, $\frac{m(m-1)}{t(t-1)}$, für AB, $\frac{mn}{t(t-1)}$

für BB, $\frac{n(n-1)}{t(t-1)}$, für BA, $\frac{nm}{t(t-1)}$

Beim 3ten Zuge:

für AAA, $\frac{m(m-1)(m-2)}{t(t-1)(t-2)}$, AAB $\frac{m(m-1)n}{t(t-1)(t-2)}$ ꝛc.

ABA, $\frac{mn(m-1)}{t(t-1)(t-2)}$

BAA, $\frac{nm(m-1)}{t(t-1)(t-2)}$

Die aufmerksame Prüfung dieser wenigen Formeln reicht hin, um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchen alle Wahrscheinlichkeiten der verschiednen Ordnungen von A und B sich bilden. Hier werden eben so wie §. 21. die Coefficienten bei den gemischten Folgen eingeführt, sobald man die Ordnung der Ereignisse unbeachtet läßt. So ergiebt sich z. B. die Wahrscheinlichkeit 2 mal A und 1 mal B zu erhalten $= 3\,\frac{m(m-1)n}{t(t-1)(t-2)}$.

Hieraus ersieht man leicht, daß die Wahrscheinlichkeit bei p Versuchen p — q mal A und q mal B zu erhalten, sobald die Ordnung unberücksichtigt bleibt, ausgedrückt wird durch

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ \ldots\ldots\ (p-q+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ q}\times$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(p-q)+1)\times n(n-1)\ldots(n-q+1)}{t(t-1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (t-p+1)}\ ^{*)}$$

*) Diese Formel wurde durch Laplace in den Memoires des Savans étrangers t. VI. pag. 623 angegeben.

§. 49.

Die Theorie der Permutationen und Combinationen ist, wie sich aus dem Vorhergehenden abnehmen läßt, eines der fruchtbarsten Mittel um die Aufgaben zu lösen, die die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffen. Diese Theorie als Grundlage des einfachsten Beweises von der Formel des Newtonischen Binoms findet man in meinen Anfangsgründen der Algebra. Bis jetzt aber wurden alle Größen nur in 2 Gruppen getheilt und ihre verschiedene Anordnungen ausgemittelt, um aber die Allgemeinheit zu erhalten, die der Gegenstand zuläßt, muß man ausmitteln, was herauskömmt, wenn man die gegebenen Größen in eine beliebige Anzahl Gruppen theilt. Die Formeln, die zu dieser Bestimmung sich eignen, findet man in der Reihe der Potenzen des Polynoms.

Schließt man von den Produkten der Trinomien

$$a' + b' + c'; \quad a'' + b'' + c''; \quad a''' + b''' + c''' \text{ ꝛc.}$$

wie §. 21. von denen der Binomien

$$m' + n'; \quad m'' + n''; \quad m''' + n''' \text{ ꝛc.}$$

so sieht man nach den Gesetzen der Multiplication, daß diese Producte alle Anordnungen enthalten, die man von den Buchstaben

$$a', b', c', a'', b'', c'', a''', b''', c''',$$

wenn man einen in jedem Factor des Produkts nimmt, machen kann. Es folgt hieraus, daß wenn die Buchstaben a, b, c verhältnißmäßig die Zahl der Fälle bezeichnen, bei welchen die Ereignisse A, B, C beim 1ten, 2ten, 3ten ꝛc. Versuch hervorgebracht werden, ein partielles Produkt z. B. $a'b''c'''b^{IV}$ die Zahl der Fälle kennen lehrt, die der Folge der einfachen Ereignisse, welche durch **ABCB** bezeichnet werden, entspricht.

Nimmt man an, daß

$$a' = a'' = a''' \ldots = a; \; b' = b'' = b''' \ldots = b;$$
$$c' = c'' = c''' \ldots = c$$

so verwandelt sich das Produkt

$$(a' + b' + c')\,(a'' + b'' + c'')\,(a''' + b''' + c'')\ \text{rc.}$$

in das Trinom $(a + b + c)$ zu der Potenz erhoben, die die Anzahl der Factoren anzeigt, oder was dasselbe ist, die der Versuche; ein beliebiges Glied $a'b''c'''b^{IV}$ dieses Produktes wird ab^2c, und findet sich so oft wiederholt, als es möglich ist, verschiedne Produkte zu bilden, von welchen jedes die Buchstaben a und c jeden einmal und b zweimal enthält, und die nach und nach die Zeichen, $'$, $''$, $'''$, ^{IV}, ... die so weit gehen, als die Zahl der Versuche, erhalten.

Es sey diese letztere Zahl $= n$, so ist der Ausdruck des allgemeinen Gliedes von dem Trinom $(a + b + c)^n$

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \ldots \,.\, n}{1 \,.\, 2 \ldots p \times 1 \,.\, 2 \ldots q \times 1 \,.\, 2 \ldots r}\; a^p b^q c^r, \text{ wenn}$$

$$p + q + r = n\text{*)}$$

für das Glied ab^2c ist

$$n = 4,\; p = 1,\; q = 2,\; r = 1$$

und daher der Coefficient dieses Gliedes $= 12$.

---

*) Siehe Complément des Elémens d'Algèbre, oder besser, die Einleitung in dem ersten Theile des Taité du Calcul différentiel et du Calcul intégral. In der deutschen Uebersetzung von Grüson, die den Titel Lehrbegriff des Differential- und Integratcalculs führt, steht diese Stelle Seite 42—52.
U.

Abstrahirt man daher von der Ordnung der Ereignisse, so wird das Glied $12a\,b^2c$ in der Reihe von $(a+b+c)^4$ die Zahl der Fälle ausdrücken, um bei 4 Versuchen die Ereignisse A und C jedes einmal und B zweimal zu erhalten.

Da der Coefficient 12 durch die Vereinigung der Glieder hervorgeht, die aus 4 verschiednen Factoren bestehen, welche sich in 3 Klassen zerlegen lassen, nämlich in die von a, in die von b und in die von c, so zeigt er in der Vereinigung dieser Glieder, bei welchen diese Klasse statt finden können, die Zahl der verschiednen Arten an, nach welchen 4 Dinge in 3 Klassen sich zerlegen lassen, so daß eine 2 dieser Dinge enthält, und die übrigen beiden nur eins.

Eben so zeigt das allgemeine Glied

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}{1\,.\,2\ldots p \times 1\,.\,2\ldots\ldots q \times 1\,.\,2\ldots r}\;a^p b^q c^r$$

die Zahl der Fälle an unter $p+q+r$ Versuchen p mal, das Ereigniß A, q mal B und r mal C zu erhalten, und der Coefficient, womit $a^p b^q c^r$ multiplicirt ist, zeigt die verschiedenen Arten an, wie sich $p+q+r$ Dinge in 3 Klassen vertheilen lassen, von welchen die 1te p, die 2te q und die 3te r dieser Dinge enthält.

§. 50.

Dieser letztere Ausdruck kann unmittelbar gefunden werden, wenn man beachtet, daß $p+q+r$ Dinge sich zu p combiniren lassen auf

$$\frac{(p+q+r)(p+q+r-1)\ldots\ldots(q+r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p}$$

verschiedne Arten, und wenn man p von $p+q+r$

Dingen hinwegnimmt, so bleiben noch $q+r$, die sich zu q auf

$$\frac{(q+r)(q+r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\ldots\,q}$$

verschiedne Arten combiniren lassen, man erhält daher im Ganzen die Zahl

$$\frac{(p+q+r)(p+q+r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,p\times 1\,.\,2\,\ldots\ldots\,q}$$

als die möglichen Arten von $p+q+r$ Dingen 2 Gruppen zu nehmen, von welchen die eine aus p und die andere aus q dieser Dinge besteht. Setzt man zum Zähler und Nenner dieses Ausdrucks noch die Factoren $1\,.\,2\,.\,3\ldots.r$ und verwandelt $p+q+r$ in n, so kömmt man auf die Formel des vorhergehenden §.

Man erhält die Permutationen statt der Combinationen, wenn man die Nenner wegläßt.

§. 51.

Im allgemeinen ist alles, was die wiederholten Versuche bei einer beliebigen Anzahl von einfachen Ereignissen betrifft, in der Reihe der Potenzen eines Polynoms enthalten, das aus so vielen Theilen besteht, als verschiedene Ereignisse berücksichtigt werden.

Das allgemeine Glied der Reihe von

$$(a+b+c+d+e)^n \text{ also}$$

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,n}{1\,.\,2\ldots p\times 1\,.\,2\,..\,q\times 1\,.\,2\,..\,r\times 1\,.\,2\ldots s\times 1\,.\,2\,..\,t}\times$$
$a^p\,b^q\,c^r\,d^s\,e^t$

wobei $p+q+r+s+t=n$, giebt die Zahl der Fälle

in welchen ein zusammengesetztes Ereigniß hervorgebracht werden kann, daß aus

p	Ereignissen	A
q	. . . .	B
r	. . . .	C
s	. . . .	D
t	. . . .	E

besteht; die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses wird erhalten, wenn man obigen Ausdruck durch $(a + b + c + d + e)^n$ als die Gesammtzahl aller Fälle theilt.

Es folgt hieraus, daß man, um unmittelbar diese Wahrscheinlichkeit zu erhalten, statt der Buchstaben a, b, c, d, e, die die Zahl der verschiedenen Gattungen von Fällen bei einem Versuche angeben, die einfachen Wahrscheinlichkeiten derselben setzen kann.

Das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniß bei einer und eben derselben Anzahl von Versuchen, ist auch hier das, in welchem die einfachen Ereignisse nach Verhältniß ihrer respectiven Wahrscheinlichkeiten vorkommen. Zieht man z. B. nur 3 einfache Ereignisse in Betracht, und setzt $n = m(a + b + c)$, so sieht man leicht ein, daß das größte Glied der Reihe von $(a + b + c)^{m(a+b+c)}$ dasjenige ist, in welchem $a^{ma}b^{mb}c^{mc}$ vorkömmt, dann setzt man $b + c = \beta$ und entwickelt $(a + \beta)^{(ma+m\beta)}$, so ist das größte Glied dasjenige, welches $a^{ma}\beta^{n\beta}$ enthält (§. 27.), aber dieses kann für sich entwickelt werden, wenn man für $\beta^{m\beta}$ die Reihe von $(b + c)^{mb+mc}$ setzt, in welcher das größte Glied das ist, welches $b^{mb}c^{mc}$ enthält, folglich ist auch das größte Glied des Produktes $a^{ma}\beta^{m\beta}$ das, welches $a^{ma}b^{mb}c^{mc}$ enthält.

Zusätze zu §. 49, 50 und 51 von dem Uebersetzer.

Die Benutzung des Polynoms in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die so häufig der Combinationslehre bedarf, ist von so mannichfaltiger Art, daß eine specielle Angabe des Gebrauchs, der von dem allgemeinen Gliede desselben gemacht werden kann, gewiß nicht überflüssig scheinen wird.

Ich setze hierbei die Richtigkeit der zu Anfang des §. 51. angegebenen Form des allgemeinen Gliedes als anerkannt voraus, und wähle mehrerer Deutlichkeit wegen, eine 5theilige Größe $a+b+c+d+e$, deren Summe ich $=g$ setze, und die zu der Potenz $n=p+q+r+s+t$ erhoben wird. Was von dieser gilt, muß überhaupt von jeder k theiligen gelten, da alle Behauptungen aus dem allgemeinen Gliede folgen, dessen Richtigkeit nicht blos für einen besondern Fall zugestanden ist.

Der Gebrauch des Polynoms ergiebt sich nun aus folgenden Sätzen:

1) Es ist einerlei, ob das allgemeine Glied durch die nte Potenz des Polynoms getheilt wird, oder ob man jeden Theil des Polynoms durch die Summe aller theilt, und das allgemeine Glied eines Polynoms nimmt, das diese Quotienten zu Theilen hat, d. h. es ist

$$\frac{a^p b^q c^r d^s e^t}{(a+b+c+d+e)^n} = \left(\frac{a}{g}\right)^p \left(\frac{b}{g}\right)^q \left(\frac{c}{g}\right)^r \left(\frac{d}{g}\right)^s \left(\frac{e}{g}\right)^t$$

dieses versteht sich von selbst (der Coefficient ist in beiden Fällen derselbe) denn man kann die 2te Hälfte der Gleichung auch schreiben

$$\frac{a^p b^q c^r d^s e^t}{g^p . g^q . g^r . g^s . g^t} = \frac{a^p b^q c^r d^s e^t}{g^{p+q+r+s+t}} =$$

$$\frac{a^p b^q c^r d^s e^t}{g^n} = \frac{a^p b^q c^r d^s e^t}{(a+b+c+d+e)^n}.$$

Da nun jedes Glied des entwickelten Polynoms die Zahl der Fälle für ein Ereigniß, dessen Wesen durch die Exponenten dieses Gliedes ausgedrückt ist, und die ganze Reihe die Zahl aller möglichen Fälle anzeigt, so wird auch hier die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch den Quotienten ausgedrückt, welcher entsteht, wenn man das entsprechende Glied des Polynoms durch die ganze Reihe theilt. Jedes Glied wird daher unmittelbar diese Wahrscheinlichkeit anzeigen, wenn man statt der Größen a, b, c, d, e die Quotienten $\frac{a}{g}, \frac{b}{g}, \frac{c}{g}, \frac{d}{g}, \frac{e}{g}$ als Theile des Polynoms nimmt, d. h. wenn man statt der Zahl der einem Ereignisse günstigen Fälle die einfachen Wahrscheinlichkeiten selbst setzt.

2) Der litteralische Theil des allgemeinen Gliedes also $a^p b^q c^r d^s e^t$ zeigt die Anzahl der Fälle, in welchen bei n Versuchen ein zusammengesetztes Ereigniß geschehen kann, daß aus p einfachen Ereignissen A, aus q einfachen Ereignissen B rc. besteht, und wo die einfachen Ereignisse in einer vorgeschriebenen Ordnung hervorgehen. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$\frac{a^p b^q c^r d^s e^t}{g^n}$$

Z. B. es wirft jemand 8 mal ein regelmäßiges Zwölfeck, das 4 weiße Seiten, 3 schwarze, 2 blaue, 2 rothe und eine grüne hat. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei dem ersten und zweiten Wurfe eine weiße Seite, bei dem dritten eine schwarze, bei dem 4ten, 5ten und 6ten eine blaue, bei dem 7ten eine rothe, und bei dem 8ten eine grüne unten zu liegen kommen wird, ist $= \frac{4^2 . 3^1 . 2^3 . 2^1 . 1^1}{12^8}$.

Dieselbe Wahrscheinlichkeit findet bei allen aus 8 einfachen bestehenden zusammengesetzten in obigem 12ecke enthaltenen Ereignissen statt, wenn jede Farbe so oft als in dieser Auf-

gabe treffen soll, und dabei jede besonders bei einem zum Voraus bestimmten Wurfe. — Die Wahrscheinlichkeit, daß unter obigen Bedingungen die rothe Seite 8 mal zu unterst liegen werde, ist $\frac{2^8}{12^8}$ ꝛc.

3) Der Coefficient des allgemeinen Gliedes

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, n}{1 \,.\, 2 \ldots p \times 1 \,.\, 2 \,.\,.\, q \times 1 \,.\, 2 \,.\,.\, r \times 1 \,.\, 2 \ldots s \times 1 \,.\, 2 \ldots t}$$

zeigt die Zahl der Fälle an, wie oft n Größen, die aus 5 verschiedenen Gattungen bestehen, zu B. aus p Größen A, aus q Größe B, aus r Größe C ꝛc. sich versetzen lassen, oder auch auf wieviel Arten n verschiedne Größen sich in 5 Gruppen zerlegen lassen, von welchen eine p dieser Größen die 2te q, die 3te r, die 4te s und die 5te t enthält. Beiden Aufgaben entspricht ein und eben dasselbe Resultat. Die Richtigkeit obiger Formel für den 2ten Fall ist §. 50. unabhängig von dem Polynom bewiesen, und ihre Richtigkeit für alle mögliche Versetzungen von n Größen, die aus 5 Gattungen bestehen, ergiebt sich wie folgt: n verschiedne Größen lassen sich bekanntlich auf $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n$ verschiedne Arten versetzen; sind unter diesen p Größen einander gleich, so geben alle Versetzungen, wo die übrigen $n - p$ ihren Platz behalten, sämmtlich ein und eben dieselbe Anordnung, und da p Größen auf $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p$ verschiedne Arten versetzt werden können, so ist die Anzahl aller verschiednen Anordnungen von n Größen, unter welchen p einander gleich sind

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p}.$$

Sind überdies noch q Größen einander gleich, so muß dieses Resultat aus gleichem Grunde noch durch $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots q$. getheilt werden ꝛc., woraus die Richtigkeit obiger Formel auch für diesen Fall unwidersprechlich sich ergiebt.

Die Ausmittelung der verschiedenen Gruppirungen, so wie die aller möglichen Anordnungen, gehört eigentlich in die Combinatorische Analytik. In diese Lehre gehört auch die §. 52. gelößte Aufgabe. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bedarf dieser Fälle aber, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ausgemittelt werden soll, wo die Zahl der Größen jeder Gattung unverändert dieselbe bleibt, und das gewünschte Ereigniß einige der hierbei möglichen Fälle enthält. Ist die Zahl der einem solchen Ereignisse günstigen Fälle $= m$, und man setzt obigen Coefficienten $= c$, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{m}{c}$. Ist ferner die Zahl der einem andern Ereignisse günstigen Fälle $= \mu$, so ist die relative Wahrscheinlichkeit des erstern Ereignisses in Bezug zu dem letztern $\frac{m}{m+\mu}$, die, wenn gleich die absolute Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse äußerst gering ist, doch der Einheit sehr nahe kommen kann. Auf diese Art läßt sich bei einem Kartenspiele, die Wahrscheinlichkeit bestimmte Blätter zu erhalten, z. B. in Whist 13 Blätter von einer Farbe, berechnen; eben so die Wahrscheinlichkeit ein gewisses Spiel eher als ein anderes zu machen, z. B. in Whist 13 Figuren eher zu erhalten, als 13 Blätter von einer Farbe u. s. w.

4) Das allgemeine Glied selbst, also

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \ldots p \times 1 \cdot 2 \cdot q \times 1 \cdot 2 \ldots r \times 2 \cdot 2 \ldots s \times 1 \cdot 2 \ldots t} \times a^p b^q c^r d^s e^t$$

zeigt die Anzahl der möglichen Fälle daß ein

aus p einfachen Ereignissen A
. q . . . . B
. r C
. s . . . . D und
. t . . . . E

zusammengesetztes Ereigniß bei n Versuchen in unbestimmter Ordnung geschehen werde. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist $(a+b+c+d+e)^n$, und daher die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses =

$$C \frac{a^p b^q c^r d^s e^t}{(a+b+c+d+e)^n}$$ wo C obigen Coefficienten bedeutet. Oder es ist diese Wahrscheinlichkeit nach Nr. 1. =

$$C \left(\frac{a}{g}\right)^p \left(\frac{b}{g}\right)^q \left(\frac{c}{g}\right)^r \left(\frac{d}{g}\right)^s \left(\frac{e}{g}\right)$$

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit mit obigem 12eck unter 8 Würfen 2 mal die weiße Seite 1 mal die schwarze, 3 mal die blaue, 1 mal die rothe, und 1 mal die grüne in unbestimmter Ordnung zu treffen

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8}{1 \cdot 2 \times 1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \times 1} \times \frac{4^2 \cdot 3^1 \cdot 2^3 \cdot 2^1 \cdot 1^1}{12^8} =$$

$$3360 \cdot \frac{4^2 \cdot 3^1 \cdot 2^3 \cdot 2^1 \cdot 1^1}{12^8}.$$

Die Wahrscheinlichkeit jede Farbe so oft als oben angegeben in unbestimmter Ordnung zu werfen, verhält sich daher zu der sie in einer zum Voraus festgesetzten Ordnung zu treffen, wie 3360 : 1.

Daß überhaupt in den Reihen der Potenzen einer 2 oder mehrtheiligen Größe das Glied das größte sey, in welchem die Exponenten der Theile, wie diese Theile selbst, zu einander sich verhalten, kann auf folgende Art allgemein bewiesen werden:

1) Das allgemeine Glied von $(a+b)^n$ kann nach Art desjenigen eines Polynoms ausgedrückt werden durch

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p \times 1 \cdot 2 \ldots\ldots q} a^p b^q = A$$

und dieses Glied ist das größte der Reihe, wenn $a:p = b:q$, also wenn $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$. Denn vergleichen wir es mit irgend einem andern Gliede, wo die Exponenten $p+k$ und $q-k$ sind, also mit

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{1.2.\ldots.(p+k) \times 1.2.\ldots.(q-k)} a^{p+k} b^{q-k} = B,$$

so verhält sich

$$A:B = \frac{b^k}{(q-k+1)(q-k+2)\ldots.q} : \frac{a^k}{(p+1)(p+2)\ldots.(p+k)}$$

der Nenner eines jeden Theils besteht aus k Factoren, also aus eben so viel als vielmal bei dem einen b und bei andern a im Zähler als Factor vorkömmt. Bei dem Vordergliede ist q der größte Factor, und da $\frac{b}{q-1} > \frac{b}{q}$ so besteht dieses aus k Factoren, von welchen keiner kleiner als $\frac{b}{q}$ ist. In dem Hintergliede ist $p+1$ der kleinste Factor, und weil $\frac{a}{p+1} < \frac{a}{p}$, so besteht dieses aus k Factoren, von welchen jeder kleiner als $\frac{a}{p}$ ist. Da nun $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$, so ist jeder der k Factoren des Vordergliedes größer als jeder der k Factoren des Hintergliedes, und folglich das Vorderglied selbst größer als das Hinterglied, und daher endlich auch $A > B$.

2) Das allgemeine Glied der nten Potenz des Trinoms $a+b+c$ ist

$$\frac{1.2.\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2.\ldots p \times 1.2.\ldots q \times 1.2.\ldots r} a^p b^q c^r = A.$$

Dieses ist das größte der ganzen Reihe, wenn $a:p = b:q = c:r$, also wenn $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$. Denn da die Summe der Exponenten in jedem Gliede $= n$ seyn muß, so wird jedes von obigem verschiedne Glied eine von folgenden Formen haben müssen:

$$\frac{1.2 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots(p+k) \times 1.2\ldots(q-k) \times 1.2\ldots r} a^{p+k} b^{q-k} c^{r} = B$$

oder $$\frac{1.2 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots(p+k+l) \times 1.2\ldots(q-k) \times 1.2..(r-l)} \times$$
$$a^{p+k+l} b^{q-k} c^{r-l} = C$$

oder endlich

$$\frac{1.2 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots(p+k) \times 1.2\ldots(q+l) \times 1.2\ldots(r-k-l)}$$
$$\times a^{p+k} b^{q+l} c^{r-k-l} = D$$

und es verhält sich

$$A:B = \frac{b^k}{(q-k+1)(q-k+2)\ldots\ldots q} : \frac{a^k}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+k)}$$

wo $A > B$ aus demselben Grunde, wie bei dem Binom.

Ferner verhält sich

$$A:C =$$
$$\frac{b^k c^l}{(q-k+1)(q-k+2)\ldots q \times (r-l+1)(r-l+2)\ldots r}$$
$$: \frac{a^{k+l}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+k+l)} =$$

$$\frac{b^k}{(q-k+1)(q-k+2)..q} \times \frac{c^l}{(r-l+1)(r-l+2)...r} :$$

$$\frac{a^k}{(p+1)(p+2)...(p+k)} \times \frac{a^l}{(p+k+1)...(p+k+l)}.$$

Wo der erste Factor des Vordergliedes im zweiten Verhältnisse, mit dem ersten Factor des Hintergliedes aus gleich vielen Factoren besteht. Dasselbe ist auch bei den 2ten Factoren der Fall, und da überdies, weil $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ die kleinsten Factoren des Vordergliedes $\frac{b}{q}$ und $\frac{c}{r}$ größer sind als die größten des Hintergliedes $\frac{a}{p+1}$ und $\frac{a}{p+k+1}$, so ist auch das Vorderglied selbst größer als das Hinterglied, und folglich auch $A > C$.

Endlich verhält sich

$$A:D = \frac{c^{k+l}}{(r-k-l+1)(r-k-l+2)....r} :$$

$$\frac{a^k b^l}{(p+1)(p+2)..(p+k) \times (q+1)(q+2)...(q+l)}$$

$$= \frac{c^k}{(r-k-l+1)....(r-l)} \times \frac{c^l}{(r-l+1)...r} :$$

$$\frac{a^k}{(p+1)....(p+k)} \times \frac{b^l}{(q+1)...(q+l)}$$

Beide Glieder des zweiten Verhältnisses bestehen aus $k+l$ Factoren. In dem Vordergliede ist $\frac{c}{r}$ der kleinste im Hintergliede sind $\frac{a}{p+1}$ und $\frac{b}{q+1}$ die größten; da

nun $\frac{c}{r} > \frac{a}{p+1}$ und zugleich $\frac{c}{r} > \frac{b}{q+1}$, so folgt daß auch $A > D$. Folglich ist A das größte Glied der Reihe von $(a+b+c)^n$.

3) In der nten Potenz eines jeden Polynoms überhaupt ist das allgemeine Glied

$$\frac{1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times 1.2\ldots s \times 1.2\ldots t \text{ ꝛc.}}$$
$$a^p b^q c^r d^s e^t \text{ ꝛc.} = A.$$

Das größte Glied wenn

$$a : p = b : q = c : r = d : s = e : t \text{ ꝛc. also wenn}$$

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{d}{s} = \frac{e}{t} \text{ ꝛc.}$$

Denn da die Summe der Exponenten in jedem Gliede $= n$ ist, so müssen, wenn in einem andern Gliede B einige Exponenten größer sind als in A, andere um eben so viel kleiner seyn, dem litteralischen Theile nach unterscheiden sich daher A und B immer um gleich viele Grundfactoren (worunter hier die Theile des Polynoms selbst also a, b, c, ꝛc. verstanden werden) von einander. Der Coefficient von B enthält im Nenner eben so viele Factoren mehr, als Einheiten die Vergrößerung der Exponenten beträgt; diese Factoren sind von so vielfacher Art, als Theile einen größeren Exponenten haben, und sie können durch die Formen $p+k$, $q+l$, $r+m$ ꝛc. bezeichnet werden, von jeder Art aber enthält der Nenner eben so viele neue Factoren als Einheiten die Vergrößerung des Exponenten von dem entsprechenden Theile beträgt. Bezeichnet man daher die Summe der Vergrößerungen der Exponenten in B durch μ, so enthält B, μ neue Factoren von den Formen $\frac{a}{p+k}$, $\frac{b}{q+l}$, $\frac{c}{r+m}$ ꝛc. von

welchen jeder, weil $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ ꝛc. kleiner als $\frac{a}{p}$ ist. Dagegen gehen die entsprechenden Factoren des Nenners von den Theilen, deren Exponenten in B kleiner sind, in B nicht so weit als in A, und A enthält im Nenner μ Factoren von den Formen $s - n$, $t - o$ ꝛc. A unterscheidet sich daher durch μ Factoren von den Formen $\frac{d}{s - n}$, $\frac{e}{t - o}$ ꝛc., von welchen keiner, weil $\frac{a}{p} = \frac{d}{s} = \frac{e}{t}$ kleiner als $\frac{a}{p}$ ist. Folglich verhält sich A zu B wie μ Factoren, von welchen jeder $> \frac{a}{p+1}$ zu μ Factoren, von welcher jeder $< \frac{a}{p}$ und daher ist nothwendigerweise $A > B$. Hierdurch ist die zu Ende des §. 51. von dem Verfasser aufgestellte unvollständig bewiesene Behauptung, daß das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniß das sey, in welchem die einfachen Ereignisse nach Verhältniß ihrer respectiven Wahrscheinlichkeiten vorkommen, allgemein bewiesen.

§. 52.

Um einen Begriff von der Menge zu geben, zu welcher die Zahl der Combinationen sich erheben kann, wenn selbst die Elemente nicht sehr zahlreich sind, will ich untersuchen, auf wieviel verschiedne Arten die 32 Karten bei dem Piquetspiel unter den beiden Spielern, deren, wie bekannt, jeder 12 erhält, und den beiden Haufen, die den Talon bilden, von welchen der eine 5 und der andere 3 Blätter enthält, vertheilt seyn können. Die gesuchte Zahl ist der Coefficient von $a^{12} b^{12} c^5 d^3$ in der Reihe von $(a + b + c + d)^{32}$ also

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, 32}{1 \cdot 2 \ldots 12 \times 1 \cdot 2 \ldots 12 \times 1 \cdot 2 \ldots 5 \times 1 \cdot 2 \cdot 3}$$

und hebt man die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren, so wird er das Produkt von

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$$

$$= 15928149470688oo$$

Die Spielkarten scheinen nicht länger als seit 1392, wo man sie zur Unterhaltung des Königs von Frankreich Carl VI antrifft, im Gebrauch zu seyn; seit dieser Zeit sind 424 Jahre verflossen, was ungefähr 154866 Tage beträgt.

Theilt man durch diese letztere Zahl die der oben berechneten Combinationen, so zeigt der Quotient 10285117114 die Zahl der Spiele an, die täglich hätten gemacht werden müssen, wenn alle mögliche Vertheilungen der 32 Karten hätten zum Vorschein kommen sollen, wobei noch vorausgesetzt wird, daß kein Spiel 2 mal vorgekommen sey.

Nimmt man also an, daß von den 170,000,000 Individuen, als wie stark man ungefähr die Bevölkerung von Europa schätzt, der 100te Theil Piquet zu spielen verstehe, und diese sich in Paare theilen, um sich ausschließlich diesem Geschäft zu widmen, so ergiebt sich, daß jedes Paar täglich 12000 Spiele machen müßte, was nicht wenig ist, da jedes Spiel wenigstens 2 bis 3 Minuten währt, und die 24 Stunden nur 1440 Minuten enthalten.

Man kann hiernach als gewiß annehmen, daß alle mögliche Combinationen, die dieses Spiel darbietet, noch nicht vorgekommen sind. Uebrigens wissen alle, die dieses Spiel kennen, daß die Anzahl der Combinationen nicht mit der der wesentlich von einander verschiednen Spiele verwechselt werden darf, die bei weitem geringer ist. Moivre beschäftigt sich mit den letztern in der Doctrine of Chances pag. 184.

§. 53.

Auf die Entwickelung des Polynoms hat **Moivre** (Miscellanea analytica p. 196.) die Frage zurückgeführt, die **Wahrscheinlichkeit auszumitteln mit einer bestimmten Anzahl Würfel eine gegebne Anzahl Augen zu werfen.** Um den von ihm eingeschlagenen Weg zu folgen, wollen wir durch n die Zahl der Würfel vorstellen, durch m die der Nummern, womit jeder, von eins angerechnet, bezeichnet ist, durch $p+1$. die Zahl, die geworfen werden soll, und wollen die Bildung der Reihe betrachten von

$$(f+f^2+f^3 \ldots\ldots + f^m)^n$$

durch die Multiplication der n Factoren, die sie enthält, und von welchen jeder =

$$f+f^2+f^3 \ldots\ldots f^m.$$

Es kömmt hier auf die Vereinigung der partiellen Producte an, die aus n Factoren von der Form

$$f^\alpha,\ f^\beta,\ f^\gamma \text{ bestehen,}$$

und, um sie nach den Potenzen von f zu ordnen, muß man alle die Glieder zusammen nehmen, wo die Summe der Exponenten dieselbe ist. Es folgt hieraus, daß der Coefficient des Gliedes, in welchem

$$\alpha+\beta+\gamma \ldots = p+1,$$

die Zahl der verschiedenen Arten anzeigt, wie oft sich aus n Zahlen, die aus denen von 1 bis m bestehen, die Zahl $p+1$ bilden läßt, und so die Auflösung der vorgelegten Aufgaben giebt.

Die Ausmittlung dieses Coefficienten, die nach der in §. 51. angeführten Formel äußerst schwer ist, wird durch

die besondere Form des zu entwickelnden Polynoms sehr einfach. Denn da

$$(f + f^2 + f^3 \ldots . f^m)^n = f^n (1 + f + f^2 \ldots . f^{m-1})^n$$

und wie aus den Elementen der Algebra bekannt ist (Lehre von der geometrischen Progression)

$$1 + f + f^2 \ldots . f^{m-1} = \frac{1 - f^m}{1 - f}$$

so folgt, daß die verlangte Reihe auf die gebracht werden kann

$$\frac{f^n (1 - f^m)^n}{(1 - f)^n} = f^n (1 - f^m)^n (1 - f)^{-n}.$$

Aber

$$(1 - f^m)^n = 1 - \frac{n}{1} f^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{2m} -$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{3m} + \text{rc.}$$

$$(1 - f)^{-n} = 1 + \frac{n}{1} f + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} f^2$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^3 \text{ rc.}$$

Läßt man daher den ersten Factor f^n außer acht, so bleibt noch in dem Produkte der beiden übrigen, so eben entwickelten, die Glieder zu finden, in welchen f^{p+1-n} vorkömmt. Zu dieser Absicht nehme man in der untern Reihe das Glied, welches f^{p+1-n} enthält, und multiplicire es mit dem 1ten Glied der obern Reihe, also mit 1, hierauf gehe man in der untern Reihe zu dem Gliede zurück, welches $f^{p+1-n-m}$ enthält, und multiplicire es mit dem 2ten Gliede der obern Reihe, das f^m enthält, und

fahre so fort, daß man in der untern Reihe immer um m Glieder zurückgeht, in der obern aber um ein Glied vorrückt. Hierdurch erhält man den gesuchten Coefficienten

$$\frac{n(n+1)\ldots p}{1.2\ldots(p+1-n)} - \frac{n(n+1)\ldots(p-m)}{1.2\ldots(p+1-n-m)} \times \frac{n}{1}$$

$$+ \frac{n(n+1)\ldots(p-2m)}{1.2\ldots(p+1-n-2m)} \times \frac{n(n-1)}{1.2} - \text{rc.}$$

eine Reihe, die man bei den angezeigten Produkte so weit fortsetzen muß, bis man auf einen Factor stößt, der 0 oder negativ ist.

Man kann dafür eine bequemere Form erhalten, wenn man bedenkt, daß, sobald $p+1-n > n-1$, in dem ersten Gliede alle Factoren von $p+1-n$ bis $n-1$, die Zähler und Nenner gemeinschaftlich enthalten, gehoben werden können, und daß man diese Factoren im Gegentheil diesem Gliede hinzufügen kann, wenn

$$p+1-n < n-1$$

Beachtet man dies, und setzt die Factoren in umgekehrter Ordnung, so wird das erste Glied

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

was unmittelbar auf die analogen Veränderungen führt, die bei den übrigen Gliedern anwendbar sind, und setzt man der Kürze wegen

$$p-m=p', \quad p-2m=p'', \quad p-3m=p''' \text{ rc.}$$

so erhält man die Formel

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$- \frac{p'(p'-1)\ldots(p'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \times \frac{n}{1}$$

$$+ \frac{p''(p''-1)\ldots(p''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$- \frac{p'''(p'''-1)\ldots(p'''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \times \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$+$ ꝛc.

die der von Moivre gleich ist. Wendet man sie, wie er gethan, an, um die Fälle aufzusuchen, mit 4 gewöhnlichen Würfeln 16 zu werfen, so muß man

$$p=15,\ n=4,\ m=6,\ p'=9,\ p''=3$$

setzen, wodurch erhalten wird

$$\frac{15.14.13}{1.2.3} - \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{4}{1} + \frac{3.2.1}{1.2.3} \cdot \frac{4.3}{1.2} = 125$$

Diese Zahl durch $6^4=1296$, was die Anzahl aller möglichen Fälle bei dem gleichzeitigen Wurf mit 4 Würfel anzeigt, getheilt, giebt die Wahrscheinlichkeit $\frac{125}{1296}$ ungefähr $\frac{1}{10}$ mit diesen Würfeln 16 zu werfen.

Nimmt man nur 3 Würfel, und sucht die möglichen Arten die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 damit zu werfen, so findet man die Summe dieser Resultate $=108$, also die Hälfte von $6^3=216$ als der Anzahl aller möglichen Fälle; es ist also gleich wahrscheinlich mit 3 Würfel auf einmal weniger als 11 oder mehr als 10 zu werfen. Dieser Satz ist die Grundlage des Spiels, das unter dem Namen Knöcheln (passe dix) bekannt ist.

Zusätze des Uebersetzers.

Die in diesem §. gelöste Aufgabe, kann auch auf folgende Art angegeben werden: Man hat n Reihen Zah-

len, von welchen jede, alle Zahlen von 1 bis m enthält, aus jeder dieser Reihen soll eine Zahl genommen werden, so daß die Summe der genommenen Zahlen $p + 1$ beträgt. Auf wieviel verschiedne Arten kann dies geschehen?

Es ist bekannt, daß wenn irgend ein Polynom $(a + b + c + d + e \ldots)$ zu der nten Potenz erhoben wird, die Summe der Exponenten in jedem Gliede $= n$ seyn muß, oder besser, der litteralische Theil eines jeden Gliedes, ein Produkt von n Factoren seyn wird. Sind die Theile des Polynoms aber an und für sich mit Exponenten versehen, so wird zwar noch immer in jedem Gliede der litteralische Theil aus n Factoren entstanden seyn, aber die Summe der Exponenten ist nun verschieden von n. Diese Summen geben jetzt überhaupt alle mögliche Zahlen an, die aus den Exponenten gebildet werden können, wenn man je n zusammen nimmt. Jede einzelne Summe für sich genommen, kömmt so oft vor, als es möglich ist, sie aus n dieser Exponenten zu bilden, wie sich aus §. 49. ergiebt. Gesetzt nun das Polynom besteht aus m Theilen, und die Exponenten dieser Theile sind die Zahlen 1 bis m, so werden die Summen dieser Exponenten in den Gliedern der nten Potenz dieses Polynoms, alle mögliche Summen angeben, die aus n mal den Zahlen von 1 bis m sich bilden lassen, wenn jede Summe aus n Posten bestehen soll, und folglich werden auch alle die Fälle vorkommen, wie oft diese Summe $p + 1$ betragen kann. Diese Fälle befinden sich natürlich in verschiednen Gliedern; so entspricht z. B. das Glied, welches $a^5 b^{p-8} c^4$ als litteralischen Theil enthält, eben sowohl dieser Forderung, als das Glied, welches $a^{p-7} b^4 c^4$ enthält, obgleich beide heterogen zu einander sind. Ist es aber überhaupt nur um die möglichen Fälle zu thun, wie oft eine einzelne Summe sich so bilden kann, so hängt durchaus nichts von dem Werthe der Wurzeln a, b, c ꝛc. ab, und man kann sie sämmtlich einander gleich setzen, also $a = b = c \ldots\ldots = f$, wodurch die Reihe

$a^1 + b^2 + c^3 \ldots\ldots + k^m$ sich in
$f^1 + f^2 + f^3 \ldots\ldots + f^m$ verwandelt,

wo nun alle Glieder, in welchen die Summe der Exponenten dieselbe ist, homogen sind, und folglich als ein Glied angesehen werden können. Der Coefficient dieses Gliedes giebt die Anzahl aller möglichen Fälle für eine bestimmte Summe, und so läßt sich auch die Anzahl aller Fälle finden, wie oft diese Summe $p + 1$ betragen kann. Durch diese Betrachtung kömmt man auf die zur Auflösung der vorgelegten Aufgabe von Moivre gewählte Reihe.

Der Gebrauch des summatorischen Gliedes einer geometrischen Progression bei der Auflösung hat zwar dieß gegen sich, daß durch die erhaltene Gleichung

$$(f^1 + f^2 + f^3 \ldots\ldots + f^m)^n = f^n (1 - f^m)^n (1 - f)^{-n}$$

der Werth der nten Potenz einer m theiligen Größe, die doch an und für sich, weil n eine ganze Zahl seyn muß, blos aus einer endlichen Anzahl Glieder besteht, wegen des Factors $(1 - f)^{-n}$ durch eine unendliche Reihe ausgedrückt wird. Allein diese Schwierigkeit hat durchaus keinen Einfluß auf die Auflösung, die durch dieses Mittel um vieles abgekürzt wird. Denn da es hier nur darauf ankömmt, den Coefficienten des Gliedes kennen zu lernen, welches f^{p+1} enthält, so ist das größte Glied, welches aus der unendlichen Reihe von $(1-f)^{-n}$ gebraucht wird, dasjenige, welches f^{p+1-n} enthält, aller höhern Glieder bedarf man nicht, und sie bleiben daher sämmtlich unbeachtet.

Der möglich kleinste Wurf mit n Würfeln, ist die Zahl n und der möglich größte mn, daher muß, wenn die Aufgabe nichts unmögliches enthalten soll, $p + 1 > n - 1$ und $p < mn$ seyn. Uebrigens ist die Zahl aller möglichen Würfe $= m^n$. Setzt man daher den gesuchten Coefficienten von $f^{p+1} = C$, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Wurfs $= \frac{C}{m^n}$.

Kömmt es aber nicht blos darauf an, eine gewisse Anzahl Augen zu werfen, sondern eine Summe, die aus gegebnen einzelnen Zahlen besteht, so werden die möglichen Fälle durch den Coefficienten eines einzelnen Gliedes der Reihe des Polynoms ausgedrückt, und die Ausmittlung aller den Forderungen entsprechenden Fälle, hat hierbei daher keine Schwierigkeit. Z. B.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit 6 gewöhnlichen Würfeln die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 in einem Wurfe zu treffen?

Hier thut man besser statt $(f^1 + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + f^6)^6$ des Polynoms $(a + b + c + d + e + f)^6$ sich zu bedienen, wo $a = f^1$ den Fall eines Würfels bedeutet, wo die 1 oben liegt, $b = f^2$ den Fall, wo die 2 oben liegt ꝛc., alle diese Fälle sind gleich möglich, d. h. es ist die Wahrscheinlichkeit 1 oder 2 oder 3 ꝛc. oder 6 mit einem Würfel zu treffen gleich groß. Die möglichen Fälle 1 bis 6 mit 6 Würfel zu treffen werden durch den Coefficienten des Gliedes, welches $abcdef$ enthält, ausgedrückt. Der Coefficient des allgemeinen Gliedes einer 6theiligen Größe überhaupt ist

$$\frac{1.2.3 \ldots \ldots \ldots n}{1.2 \ldots p \times 1.2 \ldots q \times 1.2 \ldots r \times 1.2 \ldots s \times 1.2 \ldots t \times 1.2 \ldots u}$$

und weil in gegenwärtigem Falle $n = 6$,

$p = q = r = s = t = u = 1$, so ist der gesuchte Coefficient

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1} = 720$$

Die Anzahl aller möglichen Fälle beträgt m^n, und weil hier $m = 6$, so ist sie 6^6 und folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{720}{6^6} = \frac{5}{324}.$$

Die Anzahl der erforderlichen Würfe, um eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ zu erhalten, daß wenigstens einmal die Zahlen 1 bis 6 fallen werden, findet man nach §. 23. durch die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Falls. Denn setzt man $e = \frac{5}{324}$ als die Wahrscheinlichkeit des verlangten Wurfs und $f = \frac{319}{324}$ die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten, so muß der Werth von n bestimmt werden, so daß von der Reihe $(e + f)^n$ das Glied $f^n = \frac{1}{2}$ werde, denn alle übrigen Glieder enthalten e und entsprechen folglich der Bedingung. Die Gleichung ist also

$$\left(\tfrac{319}{324}\right)^n = \tfrac{1}{2} \text{ und daher } n \,\text{Log.}\left(\tfrac{319}{324}\right) = \text{Log.}\,\tfrac{1}{2}$$

$$\text{folglich } n = \frac{-\text{Log. } 2}{\text{Log. } 319 - \text{Log. } 324} = \frac{\text{Log. } 2}{\text{Log. } 324 - \text{Log. } 319}$$

$$= 44{,}57.$$

Bei 44 Würfen also ist es wahrscheinlicher die Zahlen 1 bis 6 nicht zu treffen, als daß die getroffen werden. Bei 45 aber findet das Gegentheil statt.

§. 54.

Ich will diese Reihe von Aufgaben durch die Untersuchung der Wahrscheinlichkeit beschließen, daß alle Nummern einer Lotterie in einer gegebnen Anzahl von Ziehungen herauskommen werden; eine Aufgabe, die Euler und Laplace durch ganz verschiedne Mittel gelöst haben.

Die Betrachtung des Polynoms wäre auch hier anwendbar, aber es scheint mir nicht leicht zu der allgemeinen Auflösung zu führen, ich will daher die von Euler (Opuscula analytica t. II. p. 333.) gegebne Formel erklären. Die Note II enthält die Auflösung von Laplace.

Es sey m die Zahl der Nummern, aus welchen die Lotterie besteht, und von welchen bei jeder Ziehung i Nummern gezogen werden; es

soll die Wahrscheinlichkeit ausgemittelt werden, daß in n Ziehungen alle Nummern herauskommen werden?

Die bei jeder Ziehung gleich möglichen Fälle sind alle Combinationen, die von m Nummern je i genommen sich machen lassen, die Zahl dieser Fälle wird ausgedrückt durch

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots\ldots i}$$

wir wollen diesen Ausdruck der Kürze wegen durch P_m bezeichnen, um durch P_{m-1}, P_{m-2} ꝛc. das auszudrücken, was herauskömmt, wenn man m in $m-1$, $m-2$ verwandelt, und um alle Verwirrung zu vermeiden, wollen wir die Buchstaben a, b, c, d, e ꝛc. anstatt der Nummern der Lotterie setzen. Dieses vorausgesetzt, so geben n Ziehungen $(P_m)^n = P^n_m$ Anordnungen der erstern Fälle je n genommen, unter welchen sich sowohl die befinden, die alle Buchstaben (Nummern) enthalten, als auch die, wo einige derselben fehlen. Die Frage reducirt sich daher augenscheinlich darauf, die letztern von der Zahl aller Fälle abzuziehen, um hierdurch zu der Anzahl derjenigen zu gelangen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Es ist zuvörderst gewiß, daß alle Anordnungen, die einen bestimmten Buchstaben z. B. a nicht enthalten, in einer Lotterie vorkommen, die aus den übrigen $m-1$ Buchstaben besteht; ihre Anzahl beläuft sich daher auf P^n_{m-1}, und da so alle Buchstaben einer nach dem andern fehlen kann, so hat man schon mP^n_{m-1} Anordnungen, die von P^n_m abgezogen werden müssen, dieses giebt

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1}.$$

Man muß aber beachten, daß unter den Anordnungen, welche den Buchstaben a nicht enthalten, sich auch jene befinden, in welchen weder a noch b vorkömmt; eben so be-

finden sie sich auch unter den Anordnungen, welche b nicht enthalten; daher sind alle Anordnungen, wo 2 Buchstaben fehlen, 2 mal abgezogen, indem man von P^n_m die Anordnungen abgezogen hat, die einen Buchstaben nicht enthalten; nun hätten erstere aber, deren Summe sich auf

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} P^m_{n-2}$$

beläuft, nur ein einzigesmal abgezogen werden sollen, sie müssen daher einmal zu dem obigen Ausdrucke wieder hinzugethan werden, und man erhält

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} P^n_{m-2}$$

Die Anordnungen, wo 3 Buchstaben fehlen, z. B. a, b, c sind zuerst 3 mal abgezogen worden, nämlich mit denjenigen, wo a fehlt, mit den wo b fehlt und mit denen wo c fehlt; hierauf sind sie wieder 3 mal hinzugekommen, nämlich mit den Anordnungen, wo a und b zu gleicher Zeit fehlen, ferner wo a, c und wo b und c fehlen. Indem man sie also einerseits 3 mal hinweggenommen hat, sind sie andererseits eben so oft wieder hinzugekommen, und müssen daher von neuem abgezogen werden. Ihre Anzahl beläuft sich auf

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^n_{m-3}$$

daher hat man nach dieser Operation

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} P^n_{m-2}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^n_{m-3}$$

Geht man zu den Anordnungen über, wo 4 Buchstaben fehlen, so sieht man auf gleiche Art, daß sie 4 mal

mit denen abgezogen worden sind, wo ein Buchstab fehlt, ferner sind sie 6 mal addirt worden, mit denen, wo 2 Buchstaben fehlen, und hierauf wieder 4 mal abgezogen, mit den Anordnungen, wo 3 Buchstaben fehlen; sie sind folglich 2 mal mehr abgezogen worden, als hinzugekommen, und müssen daher wieder einmal addirt werden. Da übrigens ihre Anzahl auf

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} P^n_{m-4}$$

sich beläuft, so erhält man

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} P^n_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^n_{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} P^n_{m-4}.$$

Das Gesetz für diesen Ausdruck ist deutlich genug, um es, so weit man nur immer will, fortsetzen zu können. Um aber die Wahrheit unabhängig von aller Induction festzustellen, ist es hinreichend, zu bemerken, daß eine Anordnung, wo p Buchstaben fehlen, $\frac{p}{1}$ mal abgezogen worden ist, mit denen, wo ein Buchstabe fehlt, ferner $\frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}$ addirt, mit denen wo 2 Buchstaben fehlen, hierauf $\frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ wieder abgezogen, mit denen, wo 3 Buchstaben fehlen, und so fort. Das Resultat hiervon ist

$$-\frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots\ldots \pm \frac{p}{1}$$

was alle Glieder der Reihe von $(1-1)^p$ enthält, außer den 1ten Gliede, das $+1$ ist und dem letzten ∓ 1, nachdem p ungerade oder gerade. Obiger Ausdruck ist daher in dem erstern Falle 0, und in dem letztern $=-2$; folglich muß zu dem Ausdrucke der Zahl der gesuchten Anordnungen das Glied

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots\ldots p} P^n_{m-p}$$

mit dem Zeichen — hinzukommen, wenn p ungerade und mit dem Zeichen +, wenn p gerade ist.

Die vorgelegte Aufgabe ist daher vollständig gelößt durch die Formel

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1} \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots\ldots p} P^n_{m-p},$$

so lange man sich auf die algebraische Betrachtungen beschränkt, denn diese Formel giebt die Zahl der dem gewünschten Ereignisse günstige Fälle, und theilt man sie durch P^n_m als der Zahl aller Fälle, so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß alle Zahlen der Lotterie in n Ziehungen herauskommen werden.

Man sieht, daß die Frage voraussetzt $n > \frac{m}{i}$ und Euler bemerkt auch richtig, daß die Formel, so lange $n < \frac{m}{i}$, Null bleibt, ferner muß man in den Werthen von p bei $p = m - i$ stehen bleiben.

Es verdient auch bemerkt zu werden, daß P^n_m sich in m^n verwandelt, wenn in jeder Ziehung nur eine Nummer gezogen wird, also wenn $i = 1$.

§. 55.

Euler hat gezeigt, daß es hinreiche, um obige Formeln, wenn m und n große Zahlen sind, leicht zu gebrauchen, den Logarithmen des Verhältnisses eines jeden Gliedes zu dem vorhergehenden zu berechnen.

Denn setzt man der Kürze wegen

$$\frac{m}{1} P^n_{m-1} = A, \quad \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} P^n_{m-2} = B$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^n_{m-3} = C \text{ etc.}$$

so erhält man

$$\frac{A}{P^n_m} = m \frac{P^n_{m-1}}{P^n_m}, \quad \frac{B}{A} = \frac{m-1}{2} \frac{P^n_{m-2}}{P^n_{m-1}}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{m-2}{3} \frac{P^n_{m-3}}{P^n_{m-2}} \text{ etc.}$$

Geht man zurück zu den Werthen von P^n_m, P^n_{m-1}, P^n_{m-2} etc. so ergiebt sich

$$\frac{P^n_{m-1}}{P^n_m} = \left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-i)}{m(m-1)\ldots(m-i+1)}\right)^n = \left(\frac{m-i}{m}\right)^n,$$

$$\frac{P^n_{m-2}}{P^n_{m-1}} = \left\{\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-i-1)}{(m-1)(m-2)\ldots(m-i)}\right\}^n = \left\{\frac{m-i-1}{m-1}\right\}^n$$

etc. woraus folgt

$$\frac{A}{P^n_m} = \frac{m}{1}\left(\frac{m-i}{m}\right)^n, \quad \frac{B}{A} = \frac{m-1}{2}\left\{\frac{m-1-i}{m-1}\right\}^n,$$

$$\frac{C}{B} = \frac{m-2}{3}\left\{\frac{m-i-2}{m-2}\right\}^n \text{ etc.}$$

und bedient man sich der Logorithmen,

$$\text{Log.}\ \frac{A}{P_m^n} = \text{Log.}\ m - n\ \text{Log.}\ \frac{m}{m-i}$$

$$\text{Log.}\ \frac{B}{A} = \text{Log.}\ \frac{m-1}{2} - n\ \text{Log.}\ \frac{m-1}{m-i-1}$$

$$\text{Log.}\ \frac{C}{B} = \text{Log.}\ \frac{m-2}{3} - n\ \text{Log.}\ \frac{m-2}{m-i-2}\ \text{etc.}$$

und überlegt man daß

$$\text{Log.}\ \frac{B}{P_m^n} = \text{Log.}\ \frac{A}{P_m^n} + \text{Log.}\ \frac{B}{A},\ \text{Log.}\ \frac{C}{P_m^n} =$$

$$\text{Log.}\ \frac{B}{P_m^n} + \text{Log.}\ \frac{C}{B}\ \text{etc.}$$

so kann man das Verhältniß eines jeden Gliedes der vorgetragenen Formel mit dem ersten verglichen, durch eine Reihe bestimmen, die um so mehr convergirt, je größer die Zahl n ist, wodurch die verlangte Wahrscheinlichkeit erhalten wird, denn diese Formel giebt, wenn man sie durch P_m^n theilt und die oben gebrauchte Benennung beibehält

$$1 - \frac{A}{P_m^n} + \frac{B}{P_m^n} - \frac{C}{P_m^n} + \text{etc.}\ ^{*)}$$

---

*) Diese Reihe drückt die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus, daß in n Ziehungen, wenn bei jeder Ziehung i Nummern gezogen werden, alle m Nummern der Lotterie herauskommen. Die Werthe der einzelnen Glieder dieser Reihe findet Euler auf folgende einfache Art: Es ist

$$\frac{A}{P_m^n} = \frac{m}{1}\left(\frac{m-i}{m}\right)^n$$

Setzt man $m=90$, $i=5$, $n=100$, so erhält man mittelst der 6 ersten Glieder dieser Formel, den Bruch 0,7410 wenigstens bis $\frac{1}{10000}$ genau, als die Wahrscheinlichkeit, daß die 90 Nummern der französischen Lot-

---

weil ferner $\frac{A}{P_m^n} = \frac{A}{P_m^n} \times \frac{B}{A}$

und $\frac{B}{A} = \frac{m-1}{2} \left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^n$ so ist

$$\frac{B}{P_m^n} = \frac{A}{P_m^n} \times \frac{m-1}{2} \left(\frac{m-i-1}{m-1}\right),$$

Eben so weil $\frac{C}{P_m^n} = \frac{B}{P_m^n} \times \frac{C}{B}$

und $\frac{C}{B} = \frac{m-2}{3} \left\{\frac{m-i-2}{m-2}\right\}^n$

$$\frac{C}{P_m^n} = \frac{B}{P_m^n} \times \frac{m-2}{3} \left\{\frac{m-i-2}{m-2}\right\}^n,$$

u. s. w. Es wird also jedes Glied durch das zunächst vorhergehende gefunden, und zwar durch eine ganz einfache Rechnung, wenn man der Logorithmen sich bedient. So findet man allgemein wenn $\frac{A}{P_m^n}$ als das erste angenommen wird, das

$(p+1)$te Glied $\frac{R}{P_m^n}$ aus dem bekannten pten Gliede $\frac{Q}{P_m^n}$

weil $\frac{R}{P_m^n} = \frac{Q}{P_m^n} \times \frac{R}{Q}$

und $\frac{R}{Q} = \frac{m-p}{p+1} \left\{\frac{m-i-p}{m-p}\right\}^n$

$$\frac{R}{P_m^n} = \frac{Q}{P_m^n} \times \frac{m-p}{p+1} \left\{\frac{m-i-p}{m-p}\right\}^n$$

wenn $p=m-i$, so ist dieses Glied $=0$, und mit demselben alle folgende Glieder, da jedes immer das vorhergehende als Factor enthält.

U.

terie herauskommen werden, ein Bruch, der bei weitem $\frac{1}{2}$ übersteigt*) Es würde nicht schwer seyn, sich, wenn man zurückgeht, zu überzeugen, daß die Wahrscheinlichkeit bei der 85sten bis 86sten Ziehung $\frac{1}{2}$ zu übersteigen beginnt. Setzt man die Zahl der Ziehungen auf 200, so reichen die beiden ersten Glieder der Formel hin, sie geben 0,9990, eine Wahrscheinlichkeit, die nur wenig von 1 verschieden ist.

In den angeführten Memoires beschränkt sich Euler nicht auf die Aufgabe, die ich so eben gelößt habe, sondern er sucht auch die Wahrscheinlichkeit für das Herauskommen von $m-1$, $m-2$ rc. Nummern, und kömmt auf sehr merkwürdige Ausdrücke. Ich mache bei dieser Gelegenheit den Leser auf eine Abhandlung aufmerksam, die in denen der Academie zu Berlin für das Jahr 1751 eingerückt ist, in welcher er die Wahrscheinlichkeiten bei dem unter den Namen jeu de rencontre bekannten Kartenspiele, angiebt. Die alleinige Anwendung der Theorie der Promutationen führte ihn zu äußerst artigen und vortrefflichen Resultaten.

Von den Regeln beim Wetten und der mathematischen Hoffnung.

§. 56.

Bisher habe ich die Wahrscheinlichkeiten nur an und für sich betrachtet, meistens aber berechnet man sie um

---

*) Euler findet 0,7419 aber Trembley, der auf diese Aufgabe in den Memoires der Academie der Wissenschaften in Berlin, Jahr 1794 und 1795 (pag. 76.) zurückkömmt, hat mehr Genauigkeit in der Rechnung angewendet, und erhielt die oben angegebene Zahl.

Einsatz und Gewinn bei den Spielen zu bestimmen, und im allgemeinen nun den pecuniären Vortheil oder Nachtheil bei auf ungewisse Ereignisse gestützten Speculationen zu schätzen. Bevor noch irgend eine mathematische Theorie, die der Zufälle aufgeklärt hatte, war man schon darin einig, jede Wette als gleich anzusehen, bei welcher die Wettenden solche Summen setzen, die der Anzahl der ihnen günstigen Fälle proportionirt sind. Derjenige, der bei dem Wurfe mit einem 6seitigen Würfel, eine bezeichnete Seite zu treffen wettet, braucht nicht mehr als den 5ten Theil von dem zu setzen, was sein Gegner setzt, denn er hat nicht mehr als einen Fall zu seinen Gunsten, während der andere deren 5 für sich hat.

So natürlich auch diese Folgerung ist, so wird sie doch vielleicht noch deutlicher, wenn man zuvörderst nimmt, daß jede Seite von einem eignen Theilnehmer besetzt sey, und daß der ganze Einsatz dem zufallen soll, dessen Seite geworfen wird. Es ist hiernach kein Grund vorhanden, warum der Einsatz eines Spielers größer als der der andern seyn sollte. Der Gewinn wird daher das Fünffache des Einsatzes betragen, und wenn jemand vor der Beendung des Spiels die Stelle von 5 andern übernehmen will, so muß er ihnen nothwendigerweise ihren Einsatz erstatten; und folglich setzt er 5 mal so viel als der eine, nämlich genau nach Verhältniß der Zahl der ihnen günstigen Fälle.

Was ich so eben über obiges Beispiel bemerkt habe, läßt sich gleichfalls auf verwickeltere anwenden, man kann auf gleiche Art annehmen, daß 36 Wettende sich in alle die Fälle getheilt haben, die die Tabelle §. 7. enthält; jeder der Wettenden muß eine gleiche Summe setzen, und der ganze Einsatz bildet den Gewinn eines einzigen, wenn die Bedingung ihn zu erhalten die ist, daß der gewählte Fall geworfen werde; ist die Bedingung aber nur mit den beiden Würfeln eine gewisse Zahl zu werfen, so haben alle

Spieler, deren gewählter Fall diese Zahl enthält, ein gleiches Recht an dem Gewinne, sie müssen ihn daher gemeinschaftlich nehmen und gleich unter sich theilen. Ist z. B. 8 geworfen worden, so sind 5 Gewinner, weil diese Zahl in 5 Fällen vorkömmt; der ganze aus 36 einzelnen Einsätzen bestehende Satz des Spiels wird hiernach von 5 genommen. Läßt man daher durch einen einzigen alle die vertreten, die die günstigen Fälle für 8 besetzt haben, und durch einen zweiten alle die die übrigen Fälle halten, so sieht man, daß ihr Einsatz in dem Verhältnisse wie 5 zu 31 stehen muß, nämlich der Zahl der Fälle proportionirt, durch die sie gewinnen.

Diese Betrachtungen, von welchen Moivre zuerst Gebrauch gemacht zu haben scheint (Doctrine of Chances p. 3.) rechtfertigen, wie mich dünkt, hinlänglich den oben aufgestellten Grundsatz, nach welchem erfordert wird, daß, wenn zwei Spieler, deren Wahrscheinlichkeiten e und f sind, die Summen a und b setzen, und die Wette gleich seyn soll, folgende Proportion statt finden muß

$$a:b = e:f \text{ und daher } af = be.$$

§. 57.

Dieser Grundsatz reicht in allen Fällen hin, wo der Zufall durch einen einzigen Versuch entscheidet, weil hierbei die Ansprüche der Spieler sich nur durch das Geschehen des Ereignisses ändern; so daß, wenn durch den Willen der Spieler oder durch irgend ein hinzukommendes Hinderniß der Zufall, von welchem das Spiel abhängt, unentschieden bleibt, und jeder von ihnen somit den Fällen entsagt, die er besetzt hat, sein Einsatz ihm ungekürzt wieder zufallen wird. Es ist dem aber nicht so, wenn, um das Spiel zu endigen, mehrere Versuche erforderlich sind, und einige von diesen schon statt hatten, so daß dadurch die Zahl der günstigen Fälle für die Spieler verändert ist;

ihre Hoffnung hat sich hiermit geändert, und mit ihr das Recht eines jeden auf den ganzen Einsatz des Spiels. Nach diesen neuen Umständen nun muß die Theilung unter ihnen geschehen, wobei man sich auf die allgemeine bei allen Spielen statt findende Uebereinkunft stützt, nach welcher jeder Spieler sein Eigenthum an das gesetzte Geld verliert, dafür aber zur Entschädigung ein Recht auf den ganzen Einsatz erhält, das der Wahrscheinlichkeit proportionirt ist, die er hat, diesen Satz zu gewinnen.

Z. B. es wettet jemand mit einem sechsseitigen Würfel zweimal nach einander dieselbe Zahl zu werfen; da die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereigniß nur $\frac{1}{36}$, und die für das entgegengesetzte $\frac{35}{36}$ ist, so braucht er nur 1 und sein Gegner muß 35 setzen. Nimmt man nun an, der erste Wurf sey geschehen, und die verlangte Zahl getroffen worden, die Spieler aber wollen sich jetzt trennen, so hat der Spieler, welcher gewettet hat, diese Zahl zu werfen, beim zweiten Wurf einen Fall für und 5 gegen sich, seine Hoffnung ist daher jetzt sehr verschieden von der vor dem ersten Wurfe. In diesem Falle, da man den ganzen Satz als zum Spiele gehörig ansehen muß, haben alle gleich mögliche Fälle ein gleiches Recht bei der Theilung dieser Summe, und derjenige, der verschiedne dieser Fälle für sich vereinigt, muß die entsprechenden Theile erhalten, daher muß der erstere Spieler $\frac{1}{6}$ von dem ganzen Einsatz und sein Gegner $\frac{5}{6}$ nehmen.

§. 58.

Unter dieser letztern Form erhält die Regel beim Wetten, indem sie dazu dient, die durch die Spieler gesetzte Summen, bevor noch das Spiel beendigt ist, zu theilen, den Namen Theilungsregel. Die Anwendung, welche Pascal bei den Aufgaben davon machte, die ihm der schon §. 23. angeführte Chevalier de Méré vorlegte, hat zur

Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung Anlaß gegeben. Hier folgt eine der einfachsten dieser Fragen: Zwei Spieler legen einen Einsatz unter der Bedingung zusammen, daß er demjenigen gehören solle, der zuerst 3 Partien wird gewonnen haben; sie trennen sich, nachdem der erste 2 und der zweite eine Partie gewonnen hat; es soll der Theil ausgemittelt werden, der jedem von dem Einsatze des Spiels gehört, wobei vorausgesetzt wird, daß die Wahrscheinlichkeit eine Partie zu gewinnen, für jeden $\frac{1}{2}$ sey.

Mittelst der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten kann diese Aufgabe sehr leicht gelöst werden. Hätten sie noch eine Parthie gespielt, und der erste Spieler sie gewonnen, so würde ihm der ganze Einsatz zugehören; die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist $\frac{1}{2}$. Hätte er sie nicht gewonnen, so hat jeder Spieler 2 Partien, und die folgende muß nothwendig das Spiel entscheiden; da aber die Wahrscheinlichkeit, daß diese Parthie noch gespielt werden wird, $\frac{1}{2}$ beträgt, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, daß der erste sie gewinnt, und eben so viel für den zweiten. Nun hat aber der zweite Spieler nur diese letztere Wahrscheinlichkeit, während der erste noch $\frac{1}{2}$ von der vorhergehenden Partie hat, folglich sind die ganzen Wahrscheinlichkeiten für den ersten Spieler $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ und für den 2ten $\frac{1}{4}$.

Wenn daher der Satz des Spieles 64 Pistolen beträgt, wie Pascal annimmt, so wird der erste Spieler $\frac{3}{4}$ davon oder 48 Pistolen und der 2te nur $\frac{1}{4}$ oder 16 Pistolen nehmen. So einfach dieses Beispiel ist, so reicht es doch hin, zu zeigen, was man bei allen thun muß, die vorkommen können, und führt die Schwierigkeit auf die Entwickelung aller möglichen Fälle bis zu demjenigen zurück, durch welchen das Spiel beendigt wird.

Pascal trieb bei obigem Beispiele die Rechnung nicht so weit, er beschränkte sich auszumitteln, was geschehen wäre, wenn sie noch die 4te Partie gespielt hätten. In dem Falle,

wenn der erste Spieler sie verloren hätte, würde jeder von ihnen gleich viele Partien gewonnen haben, und daher jedem ein Recht auf die Hälfte der 64 Pistolen zukommen. „Wollen sie aber diese Partie nicht wagen, so kann der erste sagen, 32 Pistolen erhalte ich gewiß, denn ich bekomme sie selbst, wenn ich verliere, was aber die andern anbelangt, so ist es möglich, ich erhalte sie, es ist auch möglich du erhältst sie; der Zufall ist gleich, wir wollen diese 32 Pistolen daher zur Hälfte theilen, und gieb mir außerdem meine 32 Pistolen, die ich gewiß bekomme. Er erhält daher 48 Pistolen und der andere 16." (OEuvres de Pascal t. IV. p. 413.) Dieses Resultat ist dasselbe, wie das durch die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit erhaltene, und die Schlußfolge scheint hier um vieles einfacher zu seyn, aber sie verliert diesen Vorzug in verwickeltern Fällen, die so nicht anders gelöst werden können, als indem man sie von einander abhängig macht, bis man zu obigem Falle kömmt.

Fermat, der zu gleicher Zeit wie Pascal sich mit der Aufgabe der Theilung beschäftigte, wendet hierbei die Methode der Combinationen um vieles einfacher und allgemeiner an, denn sie erstreckt sich auf jede beliebige Anzahl von Spielern, während die von Pascal selbst nicht mehr bei 3 brauchbar ist. Er hatte selbst einige Mühe, die Anwendung der Combinationen zu begreifen, indem von 3 Spielern die Rede war.

§. 59.

Die Trennung der Spieler vor der Beendung des Spiels, die nur durch Uebereinkunft oder aus Speculationen statt haben kann, wird in dem Falle nothwendig, wenn das Ende des Spiels nicht bestimmbar ist, wie dieses wenigstens mathematisch möglich ist, in den Spielen, wo nur der Ueberschuß der von dem einen Spieler gewonnenen Partien über die von dem andern gewonnenen gezählt wird, so daß der ganze Ge-

winn, oder das Ende des Spiels davon abhängt, nicht blos eine gewisse Anzahl Augen zu zählen, sondern eine Anzahl, die die von dem andern Spieler gewonnenen, um eine gewisse Zahl übersteigt.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, soll gezeigt werden, was geschehen kann, wenn der Ueberschuß der Partien, wodurch gewonnen wird, 2 beträgt; wir wollen durch A und B die Spieler, so wie die von ihnen gewonnenen Partien bezeichnen, und annehmen, die Wahrscheinlichkeit eine Partie zu gewinnen, betrage $\frac{1}{2}$. Es ist gewiß, daß alle Anordnungen, in welchen derselbe Buchstabe die beiden ersten Stellen einnimmt, ausgeschlossen bleiben müssen, eben so wie die, wo er mehr als 2 Stellen einnimmt, weil diese eine Partie anzeigen, die nur nach Beendigung des Spiels vorkommen kann; da bei der Anordnung AA der Spieler A gewinnt, so bleibt die Anordnung AAB ausgeschlossen. Man sieht auch, daß derselbe Buchstab von der 2ten Stelle an nicht mehr als 3 mal nach einander vorkommen kann; so kann bei dem 6ten Spiele die Anordnung BAAAAB nicht vorkommen, weil sie von der Anordnung BAAA abgeleitet ist, durch welche schon in der 4ten Partie das Spiel endet. Nach diesen Bemerkungen findet man, daß die verschiedenen möglichen Ereignisse sind:

Beim 1ten Spiele	beim 2ten	beim 3ten	beim 4ten ꝛc.
A	AA	ABA	ABAA
oder B	AB	ABB	ABAB
	BA	BAA	ABBA
	BB	BAB	ABBB
			BAAA
			BAAB
			BABA
			BABB

Sucht man in dieser Tabelle, deren Erweiterung keine Schwierigkeit macht, die Anordnungen auf, in welchen der eine Buchstab um 2 mal mehr vorkömmt als der andere, durch die also das Spiel beendet wird, so findet man deren

2 beim 2ten Spiele, nämlich AA und BB; 4 beim 4ten Spiele nämlich

ABAA, ABBB, BAAA, BABB

und so fort. Da die Wahrscheinlichkeiten für jedes Ereigniß des 2ten Spiels $\frac{1}{4}$, für jedes des 3ten Spiels $\frac{1}{8}$, für des 4ten $\frac{1}{16}$ ꝛc.; so erhält man die Wahrscheinlichkeit $2 . \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, daß die Partie bei dem 2ten Spiele beendet seyn wird, $4 . \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$, daß sie genau beim 4ten Spiele enden wird, und folglich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, daß die Partie nicht länger als 4 Spiele dauern wird, eben so findet man $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ für das 6te Spiel und so fort; es ist übrigens gewiß, daß die Partie nur bei einer geraden Anzahl Spielen enden kann. *)

Wollen die Spieler vor Beendigung der ganzen Partie sich trennen, so müssen sie, da die Entscheidung ungewiß ist, vorläufig über die Zahl der Spiele überein kommen, nach welcher ihre Theilung geschehen soll. Ich will, um das gegebene Beispiel zu ergänzen, annehmen, der Spieler A habe das erste Spiel gewonnen, und schlägt die Beendigung des Spieles vor, obige Tabelle zeigt, daß wenn beim ersten Spiele das Ereigniß A vorkömmt, für das zweite nur die Ereignisse AA und AB übrig bleiben, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist. Durch das erstere gewinnt der Spieler A, und durch das 2te stehen beide Spieler gleich, so daß jeder die Wahr-

*) Setzt man die Zahl der Spiele $= n$ und die Zahl derjenigen, die der eine mehr als der andere gewonnen haben muß, wenn das Spiel zu Ende seyn soll $= d$, so hat am Ende der ganzen Partie der eine $\frac{n+d}{2}$ und der andere $\frac{n-d}{2}$ Spiele gewonnen. Da nun diese beiden Ausdrücke ganze Zahlen seyn müssen, so folgt, daß wenn d gerade ist, auch n gerade seyn muß, und n muß ungerade seyn, wenn d ungerade ist. Muß der Ueberschuß der gewonnenen Spiele also 2 betragen, so kann die Partie nur bei einer geraden Anzahl Spiele enden ꝛc.

scheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für sich hat, wie gleich anfangs, da sie sich zum Spiele setzten. Nach diesen Bemerkungen sind die Wahrscheinlichkeiten für den ersten Spieler $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, und für den 2ten $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Nehmen sie also das 2te Spiel, um sich darnach in ihrer Theilung zu richten, so erhält der Spieler A $\frac{3}{4}$ des ganzen Einsatzes und B $\frac{1}{4}$. Was auch schon daraus folgt, da A beim ersten Spiele hervorgebracht worden ist, so sind bei dem 2ten Spiele die Anordnungen BA und BB ausgeschlossen, und es bleibt für den 2ten Spieler nur der durch das Ereigniß AB bezeichnete Theil.

Wenn der Gewinn der Partie davon abhängt 3 Spiele mehr als der Gegner zu gewinnen, so wird die Tabelle aller bei jedem Spiele möglichen Ereignisse um vieles verwickelter; sie enthält 8 beim 3ten Spiele, unter welchen 2 die Partie beenden, 12 beim 4ten, 24 beim 5ten, worunter 6 die Partie beenden 2c.; die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind $\frac{1}{2}$ beim 1ten Spiele, $\frac{1}{4}$ beim 2ten, $\frac{1}{8}$ beim 3ten, $\frac{1}{16}$ beim 4ten, $\frac{1}{32}$ beim 5ten 2c., und man findet daher die Wahrscheinlichkeit die Partie zu beenden beim 3ten Spiele $\frac{1}{4}$; beim 5ten $\frac{3}{16}$; beim 7ten $\frac{9}{64}$ 2c.; und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß die Partie sich nicht erstrecken wird über das

5te Spiel $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}$, über das 7te $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}$, 2c.

wenn der Ueberschuß der gewonnenen Spiele, um die Partie zu gewinnen, mehr als 3 beträgt, so kömmt man auf keine geometrische Progression, aber die vollständige Auflösung dieser Aufgabe, eine der schwierigsten, die man über diesen Gegenstand aufwerfen kann, läßt sich in gegenwärtiger Abhandlung nicht mittheilen. (Siehe Note II.)

§. 60.

Die Untersuchung der ungewissen Summen, d. h. solcher, die vom Zufalle abhängen, hat in der Wahrschein-

lichkeitsrechnung einen Ausdruck eingeführt, der einer besondern Prüfung verdient, nämlich mathematische Hoffnung, worunter das Produkt einer ungewissen Summe mit der Wahrscheinlichkeit sie zu erhalten multiplicirt, verstanden wird. Durch die Regel der Theilung sieht man am besten den Grund hiervon ein. Sobald die Spieler übereinkommen, den Satz des Spieles vor der Beendung desselben zu theilen, so haben sie nur erst Hoffnung; und da diese Regel jedem von ihnen von dem ganzen Satze einen Theil anzeigt, der durch die Wahrscheinlichkeit das Ganze zu gewinnen ausgedrückt wird, so war es natürlich, diesen Theil für den Werth seiner Erwartung anzunehmen. Man kann ihn auch als das ansehen, was ein anderer ihm zahlen müßte, der, wenn das Spiel fortgesetzt würde, seine Stelle einnehmen wollte. Man findet diese verschiednen Ansichten in der Regel von den Wetten.

§. 61.

Erstens, die Gleichung $af = be$ (§. 56.) drückt die Gleichheit der Produkte aus, welche entstehen, wenn man den Gewinn, den jeder Spieler hofft, mit der Wahrscheinlichkeit ihn zu erhalten multiplicirt. Man kann daher sagen, daß bei einer gleichen Wette die mathematische Hoffnung beider Wettenden gleich seyn muß.

Zweitens, sieht man den Einsatz dieser Spieler als ihnen nicht mehr gehörig an, sobald sie ihn gesetzt, und schätzt die Hoffnung nach der durch die Einsätze hervorgebrachten Summe, die den Gewinn bei der Wette ausmacht, so hat man

$(a+b)e$ für den ersten Spieler, $(a+b)f$ für den 2ten

und weil $be = af$ und $e + f = 1$, so sind diese Werthe

respective den Einsätzen a und b gleich. Man sieht hieraus, daß der Einsatz eines jeden Spielers seiner mathematischen Hoffnung auf die ganze im Spiele stehende Summe gleich seyn muß. Der Einsatz kann als der Preiß angesehen werden, den der Spieler zahlt, um diese Hoffnung zu bekommen. *)

Drittens, bringt man die Gleichung $af = be$ auf die Form

$$be - af = 0$$

und betrachtet den Verlust als eine negative Summe, so kann das Produkt $-af$ der Summe $-a$ mit der Wahrscheinlichkeit f sie zu verlieren, bei der Schätzung der mathematischen Hoffnung des ersten Spielers in Anschlag gebracht werden, die sich bildet, wenn man den Gewinn oder Verlust, den ihm jedes der möglichen Ereignisse verursacht mit der Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse multipliciret und dem Verluste das Zeichen — giebt. Sie wird $= 0$, wenn die Wette gleich ist; das will sagen, die Umstände des Spielers müssen so angesehen werden, als hätten sie sich durch seinen Beitritt zum Spiele nicht geändert.

Diese letztere Ansicht scheint einen Widerspruch in die Glieder zu bringen, denn die durch die mathematische Hoffnung angezeigten Umständen des Spielers sind blos erdichtet, und nicht die in der Wirklichkeit statt findenden. Nach der Beendigung des Spiels ist die Baarschaft des Spielers entweder um b vermehrt oder um a vermindert, nachdem er gewonnen oder verloren hat. In dem einen wie in dem andern dieser Fälle sind seine Umstände von denen vor dem Spiele verschieden. Wie kann man also diesen

---

*) Nämlich weil $af = be$, so ist $(a+b)e = ae + af = a(e+f) = a$ und aus gleichem Grunde $(a+b)f = b$. U.

Schluß auslegen, nach welchem zwei Ereignisse sich gegenseitig aufzuheben scheinen, die sich doch wechselsweis einander ausschließen? Durch die Folgerungen der wiederholten Versuche, die durch das Vermehren derselben, ohne Aufhören streben, die Ausgleichung des Gewinnes und Verlustes hervorzubringen, indem sie die Vertheilung der einfachen Ereignisse dem Verhältniß ihrer Wahrscheinlichkeit immer näher bringen.

§. 62.

Diese durch Condorcet gegebne Erklärung, der zuerst die Schwierigkeit bemerkte, stützt sich auf durch die Rechnung bewiesene Sätze. Bei einer beliebigen Anzahl von Versuchen ist das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereigniß genau dasjenige, bei welchem der Gewinn dem Verluste gleich ist. Denn wenn die Ereignisse A und B, von welchen durch das eine b gewonnen und durch das andere a verloren wird, verhältnißmäßig die Wahrscheinlichkeiten haben

$$e = \frac{m}{m+n},\quad f = \frac{n}{m+n}$$

$$\text{so ist } be - af = \frac{bm - an}{m+n}$$

und da bei $r(m+n)$ Versuchen das wahrscheinlichste Ereigniß aus rm Ereignissen A und aus rn Ereignissen B zusammengesetzt ist, so giebt es dem Spieler, der für A wettet, die Summe

$$bmr - anr$$

die verschwindet, wenn man die Gleichung hat

$$bm - an = 0 \text{ oder die Proportion } a : b = m : n$$

Nämlich: wenn die Einsätze in demselben Verhältnisse mit den Wahrscheinlichkeiten stehen §. 56.

§. 63.

Dieses Resultat beruhet eigentlich nur auf einer relativen Wahrscheinlichkeit; aber man kann eine immer größer werdende absolute Wahrscheinlichkeit erhalten, sich demselben Resultate, so weit man nur will, zu nähern, nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältniß der Zahl der Ereignisse *A* zu der Zahl der Versuche in den Grenzen eingeschlossen seyn wird

$$\frac{m+1}{m+n} \text{ und } \frac{m-1}{m+n}$$

wenn man $r(m+n)$ Versuche umfaßt §. 32.

Setzt man in diesen Formeln sm und sn stat m und n, nach der Bemerkung §. 33.; so werden obige Grenzen

$$\frac{sm+1}{s(m+n)} \text{ und } \frac{sm-1}{s(m+n)}$$

die sich auf zusammengesetzte Ereignisse beziehen, in welchen höchstens $rsm+r$ von der Art *A* mit $rsn-r$ von der Art B, und wenigstens $rsm-r$ von der Art *A* mit $rsn+r$ von Art B in Verbindung vorkommen. In dem erstern Falle erhält der Spieler, der für *A* wettet, $(rsm+r)b$ und giebt $(rsn-r)a$; der Werth dieses zusammengesetzten Ereignisses ist daher

$$(rsm+r)b-(rsn-r)a=rs\left\{mb-na+\frac{a+b}{s}\right\}$$

Ist dieser Werth positiv, was statt findet, wenn

$$mb+\frac{a+b}{s} > na$$

so drückt er den Gewinn des Spielers, der für *A* wettet, aus, und den Verlust desjenigen, der für B wettet.

In dem zweiten Falle erhält man statt des obigen Werthes

$$(rsm-r)b-(rsn+r)a=rs\left\{mb-na-\frac{a+b}{s}\right\},$$

ein Werth, der negativ ist, wenn

$$na+\frac{a+b}{s}>mb$$

und der also einen Verlust für den ersten Spieler und einen Gewinn für den 2ten ausdrückt.

Ist $bm-an=0$, so ist alles unter ihnen gleich, sie haben beide dieselbe Wahrscheinlichkeit nicht mehr zu gewinnen oder zu verlieren als die Summe

$$rs\left\{\frac{a+b}{s}\right\}=r(a+b)$$

dieses ist ein bestimmter Theil des ganzen Einsatzes eines jeden Spielers, denn setzt man den aus der Gleichung $bm-an=0$ sich ergebenden Werth $\frac{an}{m}$ an die Stelle von b, so wird obiger Ausdruck $\frac{ra(m+n)}{m}$, und da der ganze Einsatz des Spielers, der für *A* wettet, $rsa(m+n)=M$ beträgt, so erhält man

$$r(a+b)=\frac{M}{sm}:$$

die gewonnene oder verlorne Summe hat also zu dem ganzen Einsatze das Verhältniß $\frac{1}{sm}$, das um so kleiner wird, je mehr s anwächst.

Auf gleiche Art findet man, wenn man a an die Stelle von b setzt, daß

$$r(a+b) = \frac{M}{sn}$$

wo M den Einsatz des für B wettenden Spielers bedeutet, und also $rsb(m+n)$ beträgt.

Dieses giebt für den 2ten Spieler das Verhältniß $\frac{1}{sn}$

Dieses vorausgesetzt, so können, da man für s jeden beliebigen Werth setzen kann, die Verhältnisse $\frac{1}{sm}$, $\frac{1}{sn}$ so klein werden, als man nur immer will, und nimmt man nun für r immer größere Zahlen, so kann man eine immer größer werdende Wahrscheinlichkeit erhalten, daß die von einem der Spieler verlorne und von dem andern gewonnene Summe einen noch so kleinen gegebnen Theil von ihrem ganzen Einsatze nicht übersteigen werde. Uebrigens muß bemerkt werden, daß diese Summe, die $r(a+b)$ beträgt, verhältnißmäßig mit der Zahl r wächst, und folglich auch mit der der Versuche, die durch $rs(m+n)$ ausgedrückt wird.

Das Wachsen der Wahrscheinlichkeit, so wie man eine größere Anzahl von Versuchen begreift, ergiebt sich aus dem der Anzahl der Glieder, woraus der §. 32. angeführte Ausdruck zusammengesetzt ist, und hängt von dem Factor r ab. Nimmt man diesen Factor beständig an, und läßt den Ausdruck $rs(m+n)$ durch den Factor s wachsen, wodurch die durch die Vertheilung der einfachen Ereignisse bezeichneten Grenzen immer mehr beschränkt werden, so erhält der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, da er nur immer dieselbe Anzahl der Glieder begreift, einen geringern Werth, wie schon §. 29. bemerkt worden ist, und wie man aus der Formel in der 1ten Note Nr. 8. ab-

nehmen kann. Außer diesem und dem vorhergehenden Falle, kann noch der angenommen werden, wo r und s zugleich sich verändern, jede dieser Zahlen aber nicht so schnell als die der Versuche wächst, die Wahrscheinlichkeit bleibt unverändert dieselbe. Die verlorne oder gewonnene Summe $r(a+b)$ vermehrt sich, aber ihre Verhältnisse $\frac{1}{sm}$, $\frac{1}{sn}$ zu dem Einsatze eines jeden Spielers nehmen ab; hieraus folgt, daß dieselbe Wahrscheinlichkeit einer Grenze des Verlustes oder Gewinnes entspricht, dessen Werth immer größer wird, aber so, daß er ein Theil von dem ganzen Einsatze wird, der desto geringer ist, je länger man das Spiel fortsetzen kann.

§. 64.

Wir wollen nun annehmen, die Gleichung $bm - an = o$ finde nicht statt, sondern die Hoffnung des zweiten Spielers übersteige, die des ersten, und wollen daher setzen $an = bm + c$, so folgt in dem ersten Falle

$$rs\left\{-c + \frac{a+b}{s}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Gewinn des ersten Spielers}\\ \text{Verlust des zweiten,}\end{array}\right.$$

und in dem zweiten Falle

$$-rs\left\{c + \frac{a+b}{s}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Verlust des ersten Spielers}\\ \text{Gewinn des zweiten}\end{array}\right.$$

Man sieht hieraus, daß der Gewinn des ersten Spielers in Verlust sich verwandelt, und der Verlust des 2ten in Gewinn, sobald $c > \frac{a+b}{s}$; der erste Spieler ver-

liert also auf jedem Fall innerhalb der den zusammengesetzten Ereignissen vorgeschriebenen Grenzen, während der zweite immer innerhalb derselben Grenzen gewinnt. Da nun die Zahl s, so groß man immer will, genommen werden kann, so folgt, daß so gering auch der Unterschied ist, den man in den mathematischen Hoffnungen zweier Spieler zuläßt, so kann man doch durch das Vermehren der Versuche eine jede beliebige Wahrscheinlichkeit erhalten, daß der begünstigte Spieler stets im Gewinn, der andere aber immer im Verlust seyn wird.

Dieser letzte Satz scheint mir hinreichend genug, die Regel der gleichen Wetten zu rechtfertigen, und den Sinn festzustellen, den man mit mathematische Hoffnung verbinden muß; er beweißt die Nothwendigkeit, die Wiederholung des Zufalls bei der Schätzung des Verlustes und Gewinnes, die er verursacht, in Betracht zu ziehen, und rechtfertigt vollkommen die Behauptung zu Ende des §. 17.*)

---

*) Condorcet fügt diesen Betrachtungen noch folgende bei, die nicht weniger merkwürdig sind.

In der Reihe von $(m+n)^{r(m+n)}$ nähert sich die Summe der Glieder die dem größten, also demjenigen, in welchem $m^{rm} n^{rn}$ vorkömmt, vorhergehen, mit dem Werthe der ganzen Reihe verglichen, immerwährend dem Verhältnisse $\frac{1}{2}$; dasselbe ist bei den Gliedern der Fall, die diesem größten Gliede folgen. Erstere entsprechen den Ereignissen, durch welche der für A wettende Spieler gewinnt, die andern den Ereignissen, durch welche sein Gegner gewinnt; wenn ihre mathematische Hoffnungen gleich sind, und nur in diesem Falle. Es folgt unwidersprechlich hieraus, daß die Umstände der Spieler genau dieselben sind, denn so wie die Versuche wiederholt werden, streben die Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen, für beide gleich zu werden (Essai sur la probabilité des décisions etc. p. 145.). Die Grenzen innerhalb, welcher ich mich bei gegenwärtigem Werke beschränken muß, erlauben mir nicht, den Beweis für obigen Satz beizufügen.

§. 65.

Ich habe bis jetzt nur 2 mögliche Ereignisse bei jedem Versuche betrachtet, allein man wendet die mathematische Hoffnung bei der Schätzung aller Arten von Zufall an. Z. B. Es macht jemand sich anheischig, einem andern der einen 6seitigen mit den Zahlen von 1 bis 6 bezeichneten Würfel wirft, so viel Francs zu zahlen, so viele Augen er werfen wird, wieviel muß der Werfende dem andern zum Voraus geben, damit er diese Bedingung machen kann? Die mathematische Hoffnung des Werfenden bildet sich, wenn man, die, von allen möglichen Ereignissen, und die dem Produkte der Anzahl der Augen auf den verschiedenen Seiten, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ eine dieser Seiten zu treffen multiplicirt, gleich sind, addirt. Das Resultat ist

$$\tfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3\tfrac{1}{2}\,\mathrm{fr}.$$

Kein Ereigniß beträgt genau diese Summe; aber sie ist das Mittel zwischen Gewinn und Verlust, nämlich ersterer kann eben so viel als der letztere von dieser Summe abweichen. Denn der Werfende erleidet bei den Augen

1, 2, 3, einen Verlust von $2\frac{1}{2}$ fr, $1\frac{1}{2}$ fr, $\frac{1}{2}$ fr

und erhält bei den Augen

4, 5, 6 einen Gewinn von $\frac{1}{2}$ fr, $1\frac{1}{2}$ fr, $2\frac{1}{2}$ fr

beide decken einander. Für den andern Spieler gilt dasselbe nur in umgekehrter Ordnung.

Diese Ausgleichung kann zwar nie mit strenger Genauigkeit hervorgebracht werden, aber die vervielfältigten Versuche streben ohne Unterlaß sie hervorzubringen, so wie sie dahin wirken, den geringsten Vortheil anzuhäufen. Dieses beweißt die Erfahrung täglich. Personen, die beständ-

dig Gesellschaftsspiele, wo die Bedingungen für beide Theile gleich sind, unter sich spielen, und die ungefähr gleiche Fertigkeit haben, sehen mit der Zeit ihren Verlust und Gewinn sich einander nähern; die Banquier bei reinen Hazardspielen im Gegentheil, die diese Spiele bei gewissen Vortheilen (die ihnen von den Gegnern zugestanden sind) immerwährend treiben, verschaffen sich dadurch ein sicheres Einkommen, sobald sie Fond genug haben, um einige von Zeit zu Zeit vorkommende bedeutende Verluste decken zu können.

§. 66.

Die Lotterien sind von dieser Art und ihr Bestehen gründet sich darauf, daß sie den Einsätzenden keinen Gewinn, der ihrem Risiko entspricht, ertheilen; das Mißverhältniß ist meistens bedeutend, und wird immer größer, so wie die Wahrscheinlichkeiten des Erfolges (die Wahrscheinlichkeiten eines Gewinnes) sich verringern, wie man aus der Lotterie de France abnehmen kann.

Der einfache Auszug oder das Herauskommen einer einzigen Nummer wird nur mit dem 15fachen Einsatze bezahlt, obgleich die Wahrscheinlichkeit hiervon nur $\frac{1}{18}$ §. 44. beträgt, und also einen Gewinn geben müßte, der das 17fache des Einsatzes beträgt, und folglich mit dem 18fachen Einsatze bezahlt werden sollte. Die mathematische Hoffnung des Banquiers übersteigt daher die der Spieler um $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

Der bestimmte Auszug oder das Herauskommen einer einzigen Nummer, bei einem zum Voraus bestimmten Zuge, z. B. beim ersten, wird nur mit dem 70fachen Einsatze bezahlt, bei einer Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{90}$. Der Vortheil des Banquiers bei diesem Zufalle ist also $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$.

Die Ambe oder das Herauskommen von 2 besetzten Nummern in einer Ziehung, wird nur mit dem 270fachen

Einsatze bezahlt. 90 Nummern aber zu 2 verbunden, geben $\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$ Amben, und die 5 Nummern der Ziehung $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, die Wahrscheinlichkeit, daß eine Ambe herauskommen wird, ist daher $\frac{10}{4005}$, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{3995}{4005}$, der Gewinn des Spielers sollte daher das $\frac{3995}{10} = 399{,}5$ fache des Einsatzes betragen; der Vortheil des Banquier ist folglich

$$(399{,}5 - 269)\,\frac{10}{4005} = \frac{1305}{4005} = \frac{29}{89}.$$

Die bestimmte Ambe oder das Herauskommen zweier besetzten Nummern bei zum Voraus bestimmten Zügen der Ziehung, wird nur mit dem 5100fachen Einsatze bezahlt. Da hier die Anordnungen zu 2, nicht aber blos die Combinationen berücksichtigt werden, so enthalten die 90 Nummern 8010 bestimmte Amben, da ferner die Züge bestimmt sind, so ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Ambe $\frac{1}{8010}$; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{8009}{8010}$, der Gewinn müßte also das 8009fache des Einsatzes betragen. Folglich ist der Vortheil des Banquier

$$(8009 - 5099)\,\frac{1}{8010} = \frac{291}{801}.$$

Die Terne oder das Herauskommen von 3 besetzten Nummern in einer Ziehung wird mit dem 5500fachen Einsatze bezahlt, 90 Nummern aber zu 3 verbunden, geben $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$ Ternen, und die 5 Nummern

der Ziehung $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$, die Wahrscheinlichkeit, daß eine Terne herauskommen wird, ist also $\frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$ und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{11747}{11748}$; der Gewinn müßte daher dem 11747fachen Einsatze gleich seyn, folglich ist der Vortheil des Banquier

$$(11747 - 5499) \frac{1}{11748} = \frac{6248}{11748} = \frac{142}{267}.$$

Die Quaternen oder das Herauskommen von 4 besetzten Nummern in einer Ziehung, wird mit dem 75000fachen Einsatze bezahlt; 90 Nummern aber zu 4 verbunden geben $\frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190$ Quarternen, und die 5 Nummern der Ziehung $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$, die Wahrscheinlichkeit, daß eine Quarterne herauskommen wird, ist $\frac{5}{2555190} = \frac{1}{511038}$, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{511037}{511038}$; der Gewinn müßte daher dem 511037fachen Einsatze gleich seyn; der Vortheil des Banquier beträgt folglich

$$(511037 - 74999) \frac{1}{511038} = \frac{436038}{511038} = \frac{218019}{255519}$$

Man konnte sonst auch die Quinternen besetzen, oder das Herauskommen von 5 besetzten Nummern in derselben Ziehung, es wurde mit dem 1000000fachen Einsatze bezahlt; 90 Nummern aber geben zu 5 verbunden $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43949268$ Quinternen, und die 5 Nummern der Ziehung nur eine, die Wahrscheinlichkeit für eine Quinterne ist daher $\frac{1}{43949268}$; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{43949267}{43949268}$, der Gewinn müßte daher dem 43949267fachen Einsatz gleich seyn; daher be-

trägt der Vortheil des Banquier

$$(4394267 - 999999)\frac{1}{43949268} = \frac{42949268}{43949268}$$

was mehr als $\frac{42}{43}$ beträgt.

Man hat diese Art zu spielen abgeschaft, bei welcher die Schwierigkeit zu gewinnen so groß ist, daß jeder davon hätte abgehalten werden sollen. Um sich hiervon leicht einen Begriff zu machen, braucht man nur zu bedenken, daß wenn in 4 verschiednen Städten monatlich 2 Ziehungen geschehen, also jährlich 96, mehr als 457804 Jahr erforderlich seyn würden, wenn alle Quinternen herauskommen sollten; wobei noch vorausgesetzt wird, daß in dieser unermeßlichen Zwischenzeit keine 2mal herauskomme. Die Ziehung aller Quaternen erfordert bei derselben Voraussetzung mehr als 5323 Jahr. Man würde auf noch auffallendere Resultate kommen, wenn man nach der Formel §. 54. die erforderliche Anzahl Ziehungen berechnen wollte, die vorgenommen werden müßten, um eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ zu erhalten, eine Quinterne oder Quaterne zu gewinnen.

§. 67.

Man muß übrigens nicht glauben, daß der Gewinn des Unternehmens bei einer Lotterie so unermeßlich sey, als obige Rechnungen zeigen. Damit das große Mißverhältniß zwischen Einsatz und Gewinn unfehlbar die ganze Wirkung hervorbringe, ist es erforderlich, daß alle Combinationen der Nummern gleich besetzt gespielt werden, dieses ist aber bei weitem nicht der Fall. Das Besetzen der Auszüge, was am zahlreichsten geschieht, ist äußerst ungleich unter den 90 Nummern vertheilt, nach Maaßgabe, wie sie zuletzt herausgekommen sind, oder nach abergläubischen Träumereien; ja die Administration der Lotterie hatte

sich, indem sie das Herauskommen einer zu stark besetzten Nummer befürchtete, das Recht vorbehalten, sie zu schliessen, d. h. keinen Einsatz auf diese Nummer mehr anzunehmen, aber eine lange Erfahrung hat sie über diese Furcht beruhigt, jetzt setzt sie dem freien Willen des Spielers keine Grenzen mehr, nur verkauft sie noch wie ehedem zum Voraus ausgefertigte Loose, um so viel als möglich die Einsätze auf alle Combinationen zu vertheilen. Uebrigens ist es nicht nothwendig, daß die Vertheilung der Einsätze sich sehr der Gleichheit nähere, um die Unternehmer für Verlust sicher zu stellen. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man seine Vortheile durch das Verhältniß seiner Einnahmen und Ausgaben bei jeder Ziehung betrachtet.

Wenn alle Auszüge gleich besetzt wären, so würde eine Ziehung ihm 5 × 15 oder 75 Einsätze kosten, hätte er 90 erhalten, so bliebe ihm ein sicherer Ueberschuß von 15 Einsätzen, und er würde schon ohne Verlust wegkommen, wenn auch nur 75 Nummern besetzt wären. Macht man dieselbe Rechnung bei den übrigen Arten zu spielen, so sieht man den Ueberschuß der Einnahme über die Ausgabe sich auf eine so schnelle Art vermehren, daß der Unternehmer bei weitem früher gedeckt ist, bevor noch alle Combinationen oder Anordnungen besetzt sind.

Die Vortheile der Lotterie, die sich während einer langen Reihe von Jahren als sicher ergeben haben; die Verluste und Unordnungen, von welchen sie die Ursache für eine durch ihre betrügliche Hoffnung berauschte Menge Menschen aller Klassen war, unglücklicherweise eben so sicher, sprechen lauter noch als obige Rechnungen gegen die Schwachheit bei einem so ungleichen Spiele Summen zu wagen, von welchen ein bei weitem nützlicherer Gebrauch hätte gemacht werden können, sowohl zur Verbesserung des moralischen als des physischen Zustandes der Menschen, wenn man gut eingerichtete und weise verwaltete Sparkassen eingerichtet hätte, wo die kleinen Ersparnisse fleißiger Arbeiter und treuer Diener gesammelt worden wären, um ih-

nen dadurch eine sichere Hülfe vorzubereiten, für die Zeit des Alters und der Unbrauchbarkeit.

Diejenigen, die mit aller Gewalt unbesonnene Hoffnungen durchsetzen wollen, haben auf alle mögliche Arten die Combinationen, die die Einrichtung der Lotterie darbieten, und die Tabellen der Nummern, die seit ihrer Entstehung herausgekommen sind, durchsucht, um ein Mittel aufzufinden, durch welches ihre schwache Seite sich entdecken liese. Dieses hätten sie auf eine vernünftigere Art thun können, wenn sie darauf gefallen wären, die Progression eines wachsenden Einsatzes so fest zu setzen, daß ein einziger glücklicher Zufall, dessen Wahrscheinlichkeit bedeutend seyn würde, allen frühern Verlust decken müßte; allein durch dieses Mittel kann man zu einer, auch nur wenig bedeutenden Wahrscheinlichkeit, einen selbst schwachen Gewinn zu erhalten, nicht anders gelangen, als wenn man eine bedeutende Summe aussetzt, bei welcher der Verlust in gar kein Verhältniß zu dem zu hoffenden Gewinne steht. Unbemittelte Spieler können ein solches Spiel nicht verfolgen, ohne daß es sie drückt oder sie sich übernehmen, sie sind öfters gezwungen davon abzustehen, und verlieren die ganze darauf verwendete Summe. Was die reichen Leute anbelangt, diese können von ihrem Kapitale einen bei weitem bessern Gebrauch machen, wenn sie es zur Verbesserung des Ackerbaues, zur Vervollkommnung der Künste oder zur weitern Ausdehnung der Handlung verwenden. Bei diesem Spiele, von welchem man sagen kann, daß die Natur der Banquier sey, vermehren weise und aufgeklärte Spieler, da die reproductive Kraft der Natur den Fond bildet, ihre Glücksgüter, während sie zu gleicher Zeit der Gesellschaft zu einem Anwachs ihres Wohlseyns verhelfen.

Von der moralischen Hoffnung.

§. 68.

Nicht blos bei einem ungleichen Spiele wagt ein vernünftiger Mann keine etwas bedeutende Summe bei einer beträchtlichen Wahrscheinlichkeit für einen kleinen Gewinn, er denkt selbst alsdann noch so, wenn auch die Bedingungen des Spiels gleich sind; aber er ist im Gegentheile leicht dazu zu bewegen, eine geringe Summe bei einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit in der Hoffnung auf einen bedeutenden Gewinn zu wagen. Beide Fälle können dessen ungeachtet einer und eben derselben mathematischen Hoffnung entsprechen, denn die Gleichung $be = af$ bleibt immer, wenn in einem ihrer Glieder der eine Factor in demselben Verhältnisse sich vermindert, in welchem der andere größer wird. Die moralische Schätzung des Ereignisses ist also hier von der mathematischen Werthbestimmung desselben verschieden. Der Grund hiervon liegt in dem Mißverhältniß zwischen den Folgen eines Verlustes, der die Glücksumstände des Spielers bedeutend vermindert, und den Folgen eines Gewinnes, durch welchen nur eine unbedeutende Vermehrung derselben bewirkt wird. Es ist unbestreitbar, daß der absolute Werth einer Summe Geldes nicht immer das genaue Maaß ihrer Wichtigkeit ist; meistentheils muß man sie nach dem Schaden schätzen, den ihr Verlust, oder nach dem Nutzen, den ihr Gewinn verschafft, was von den Glücksumständen desjenigen abhängt, der sie gewinnen oder verlieren soll; aber wie soll man diese Betrachtung mit in die Rechnung bringen? Welches Verhältniß läßt sich zwischen dem Eigenthume und den ungewissen Summen aufstellen? Welche Formel, die allen Bedingungen des Gegenstandes genug thut, muß an die Stelle der mathematischen Hoffnung gesetzt werden? Ist es endlich wohl dienlich, diese Schätzung der ungewissen Ereignisse außer Acht zu lassen? Dieses ist es, was ich jetzt nach und nach untersuchen will.

§. 69.

Um der relativen Schätzung des Verlustes und Gewinnes eine Grundlage zu geben, scheint es zuvörderst unerläßlich die Gegenstände des Aufwandes nach ihrer Nützlichkeit zu klassificiren; allein es würde sehr schwer seyn, auf diese Art einen Tarif zu bilden, den jedermann anerkennt. Die Mittel zum Wohlleben, der Ueberfluß selbst, an den man sich gewöhnt hat, werden öfters als Theil des Nothwendigen angesehen, und jeder bestimmt den Werth der Glücksgüter nach seiner Lage und seiner Meinung. Man sieht also in dem Begriffe des relativen Verlustes und Gewinnes, nur das Mehr oder Weniger in weitläufigem Sinne genommen, der das Gesetz der Zu- und Abnahme ihrer Wichtigkeit völlig unbestimmt läßt, so daß also kein anderes Mittel hierbei Rechnung in Anwendung zu bringen übrig bleibt, als eine Hypothese zu bilden, und sie durch Vergleichung dessen, was aus ihr folgt, mit dem, was der gesunde Menschenverstand zeigt, zu prüfen; ein Verfahren, das nicht zu genauen Resultaten führt, wohl aber dazu dienen kann, das Annehmbare von dem Absurden zu unterscheiden.

Was am besten auf den ersten Anblick hierzu sich darbietet, ist, als Maaß der Wichtigkeit einer Summe in Beziehung zu irgend einem Besitz, das Verhältniß beider zu einander selbst anzunehmen, und hiernach folglich den Satz aufzustellen, daß jemand der 1000^{fr} besitzt, und 100^{fr} gewinnt, einen gleichen Vortheil mit dem habe, der bei einem Besitze von 100000^{fr} eine Summe $= 10000^{fr}$ gewinnt, und mit dem, der 1^{fr} gewinnt, aber nur 10^{fr} hat.

Sobald man bei der Schätzung ungewisser Summen das vorherige Vermögen berücksichtigt, so erhält dieselbe Summe, sobald man sie verliert, eine größere Wichtigkeit, als wenn man sie gewinnt. Denn ein Spieler, der 1000^{fr} in Vermögen hat, und eine Summe von 100^{fr} wagt, ist

dem Verluste des 10ten Theils seines Vermögens ausgesetzt; die Wichtigkeit dieser Summe für ihn wird folglich durch $\frac{1}{10}$ vorgestellt; gewinnt er diese Summe aber, so hat er 1100^{fr}, und dieselben $100^{fr.}$ sind nur $\frac{1}{11}$ seines Vermögens, und haben folglich einen geringern moralischen Werth. Buffon, der diese Hypothese aufgestellt hat, folgert hieraus, daß das einfachste und gleichste Spiel dasjenige, bei welchem 2 Personen von gleichen Glücksumständen eine gleiche Anzahl günstiger Fälle für sich haben, immer einen absoluten Verlust am Vermögen verursacht, denn das Ereigniß vermindert das Vermögen des Verlierenden bedeutender, als es das des Gewinners vermehrt. Im obigen Beispiele ist die Werthbestimmung dieses Verlustes $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$; in dem Beispiele von Bouffon, wo die ungewisse Summe die Hälfte des Vermögens der Spieler beträgt, sind die moralischen Werthe des Verlustes und Gewinnes durch $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ausgedrückt, wovon der Unterschied $\frac{1}{6}$ beträgt. *)

Allgemein sey a der vorherige Besitz, und α die ungewisse Summe; so wird die Wichtigkeit dieser Summe durch $\frac{\alpha}{a}$ als Verlust ausgedrückt durch $\frac{\alpha^2}{a+\alpha}$ als Gewinn, und der Unterschied beider ist $\frac{\alpha}{a(a+\alpha)}$.

Dieses führt natürlich darauf den Werth eines Verlustes auszumitteln, der mit dem Gewinne α gleiche Wichtigkeit hat. Dieser Verlust sey $= x$, so erhält man

$$\frac{x}{a} = \frac{\alpha}{a+\alpha} \text{ folglich } x = \frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{a}}$$

*) Essais d'Arithmétique morale, p. 69. t. IV. du Supplement de l'Histoire naturelle. Ausgabe in 4to.

Aus diesem letztern Ausdrucke für x ersieht man, daß der Werth davon sich um so mehr α nähert, je kleiner der Bruch $\frac{\alpha}{a}$ wird; so daß Gewinn und Verlust nur alsdenn gleiche Wichtigkeit haben können, wenn ihr Verhältniß zu dem vorherigen Besitze unendlich klein ist.

§. 70.

So betrachtet sie Daniel Bernoulli anfänglich, und nimmt an, daß ihr moralischer Werth oder ihre Wichtigkeit, die er durch das leiteinische Wort emolumentum bezeichnet, im umgekehrten Verhältnisse zu dem vorherigen Besitze stehe.*)

Ferner nimmt er an, daß irgend ein Vermögen durch die Anhäufung unendlich vieler kleiner Zuwachse, von welchen jeder einen Grad der Wichtigkeit hat, der seinem Verhältnisse zu dem schon vorher gebildeten Kapitale proportionirt ist, entstanden sey. Die Summe aller dieser Grade machen zusammen die Wichtigkeit oder den moralischen Werth der so hervorgebrachten Summe aus. Bezeichnet man durch α die kleinen Anwachse des Kapitals, durch a, a′, a″, a‴....x seine aufeinander folgenden Werthe, und durch k eine beständige Größe, so wird die Wichtigkeit des Kapitals x**) durch die Reihe ausgedrückt

$$\frac{k\alpha}{a} + \frac{k\alpha}{a'} + \frac{k\alpha}{a''} + \frac{k\alpha}{a'''} \ldots\ldots + \frac{k\alpha}{x-\alpha}$$

deren Summe, wenn man α unendlich klein nimmt, durch

*) Commentarii Academiae Petro politanae t. V. p. 175.

**) Soll heißen die Wichtigkeit der Summe, wodurch das Kapital a in x sich verwandelt. U.

die Integralrechnung sehr leicht gefunden wird. (Siehe Note III.) Mit ihrer Beihülfe findet man k Lg. $\frac{x}{a}$ als das Maaß der gesuchten Wichtigkeit.

Um sich zu überzeugen, daß dieses Maaß die gemachte Bedingung erfüllt, ist es schon hinreichend, wenn man die Entwickelung der Logarithmen in Reihen kennt; denn nimmt man an, daß x sich in $x + \alpha$ verwandelt, so wächst der Ausdruck Log. $\frac{x}{a}$ der nun Log. $\left(\frac{x+\alpha}{a}\right)$ wird um die Größe

$$k \text{ Log.} \left(\frac{x+\alpha}{a}\right) - k \text{ Log.} \frac{x}{a} = k \text{ Log.} \left(\frac{x+\alpha}{x}\right) =$$

$$k \text{ Log.} \left\{1 + \frac{\alpha}{x}\right\} = k \left\{\frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha^2}{2x^2} + \frac{\alpha^3}{3x^3} - \text{ꝛc.}\right\}$$

während obige Reihe um das Glied $\frac{k\alpha}{x}$ wächst, beide Anwachse nähern sich der Gleichheit um so mehr, je kleiner α ist.

Der Divisor a bezeichnet hier ein Grundkapital geringer als dies kann der Werth von x nicht werden, der nicht negativ angenommen werden darf, denn wie Bernoulli bemerkt, kann man nur von dem Menschen, der so eben vor Hunger stirbt, sagen, er besitze absolut nichts; „derjenige, der durch betteln sich eine jährliche Summe von 10 Goldstücken erwirbt, wird nicht 50 unter der Bedingung annehmen, auf dieses Mittel sein Leben zu fristen, so wie auf jedes andere, Verzicht zu leisten. Dasselbe ist bei denen der Fall, die nur vom Borgen leben. Könnten sie sich wohl je dieses Hülfsmittel versagen, selbst für eine Summe, die mehr als hinlänglich wäre, sie von ihren Schulden zu befreien? Wenn also der Bettler und der Borger auf diese ihre Gewerbe nicht verzichten wollen,

ersterer nicht gegen ein Kapital unter 100 Goldstücken, und letzterer nicht unter 1000, so können wir sie ansehen, ersteren als 100 Goldstücke reich und letztern als habe er ein Vermögen von 1000 Goldstücken, obgleich man im gemeinen Leben sagt, der eine besitze nichts und der andere weniger als nichts.“ Im allgemeinen wird das Vermögen eines Individuum wenigstens durch die Subsistenz, die er durch Anwendung seiner Kräfte und durch seinen Fleiß erlangt, vorgestellt, und verschwindet nur mit seinem Leben.

§. 71.

Bezeichnen wir durch y die Wichtigkeit des Kapitals x, und durch y′ die des Kapitals x′, so ist

$$y' - y = k \,\text{Log.}\, \frac{x'}{a} - k \,\text{Log.}\, \frac{x}{a} = k \,\text{Log.}\, \frac{x'}{x}.$$

Nehmen wir nun wie im §. 69. an, daß a ein Vermögen bedeute und α irgend eine ungewisse Summe, und setzen $x = a$, $x' = a + \alpha$ und $x' = a - \alpha$, so wird die Wichtigkeit der Summe α ausgedrückt durch

$k \,\text{Log.}\, \frac{a + \alpha}{a}$ als Gewinn, und durch $k \,\text{Log.}\, \frac{a - \alpha}{a}$ als Verlust und ist in dem 2ten Falle negativ.

Um einen Verlust x zu bestimmen, dessen Wichtigkeit der des Gewinnes α gleich ist, müssen wir setzen

$$- k \,\text{Log.}\, \frac{a - x}{a} = k \,\text{Log.}\, \frac{a + \alpha}{a}, \text{ daher } \frac{a}{a - x} = \frac{a + \alpha}{a}$$

$$\text{und } x = \frac{a\alpha}{a + \alpha}.$$

Dieser Werth ist dem gleich, welcher durch die Hypothese von Buffon erhalten wird, obgleich im Uebrigen bei

dieser Hypothese die Wichtigkeit des Verlustes bei weitem schneller anwächst, als bei der von Bernoulli. Zwei sehr von einander verschiedne Hypothesen also entsprechen denselben Bedingungen, die der Gegenstand bei dem ersten Anblicke darbietet, nämlich daß der Werth der ungewissen Summen nach Maaßgabe abnimmt, so wie der vorherige Besitz größer wird, und daß die Wichtigkeit des Verlustes größer als die des Gewinnes sey. Man könnte noch eine unendliche Menge andere Hypothesen auffinden, die dasselbe thun; allein die von Bernoulli scheint die annehmbarste, da sie zu den Elementen, aus denen die Kapitalien sich bilden, hinabsteigt, und weil wirklich im gemeinen Leben durch die sehr kleinen Summen, die man mit Gleichgültigkeit verlieren oder gewinnen kann, die verschiednen Glücksumstände geschätzt werden. Man sagt „Es schadet ihm so viel einen Thaler zu verlieren als mir 1 gl.“ das will sagen „ein Thaler ist bei seinem Vermögen das, was bei dem meinigen ein Groschen ist.“

§. 72.

Statt des absoluten Werthes solcher Summen, die von ungewissen Ereignissen abhängen, substituirt Daniel Bernoulli ihre moralischen Werthe, oder die Wichtigkeit der Kapitalien, die durch die Veränderungen, welche diese Ereignisse in den Glücksumständen des Spielers hervorbringen, sich ergeben. Wenn z. B. Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten e, f, g sind, die Summen α, β, γ hervorbringen sollen, und a den vorherigen Besitz bezeichnet, so wird anstatt

$$e\alpha + f\beta + g\gamma \quad (\text{§. } 61.)$$

als der mathematischen Hoffnung, genommen

$$Y = k \left\{ e \,\text{Log.}\, \frac{a+\alpha}{a} + f \,\text{Log.}\, \frac{a+\beta}{a} + g \,\text{Log.}\, \frac{a+\gamma}{a}\right.$$

für den moralischen Werth der Glücksumstände des Spielers, der diese Ereignisse erwartet. Dieses ist das, was Bernoulli mensura sortis nennt, und Laplace fortune morale im Gegensatz der fortune physique, nämlich im Gegensatz des absoluten Werthes eines Kapitals von gleicher Wichtigkeit. Bezeichnet man dieses Kapital durch X, so erhält man

$$Y = k \operatorname{Log.} \frac{X}{a} \text{ und daher } X = (a+\alpha)^e (a+\beta)^f (a+\gamma)^g$$

denn es ist $e+f+g=1$ (§. 12.)

Sucht man den gleichen Werth des Gewinnes oder dessen, was Laplace moralische Hoffnung nennt, so muß man $X = a+x$ setzen, wodurch erhalten wird

$$x = (a+\alpha)^e (a+\beta)^f (a+\gamma)^g - a$$

Entwickelt man die Potenzen und die angezeigten Multiplicationen, und beschränkt sich blos auf die Glieder, in welchen die ungewisse Summen nur auf der ersten Potenz vorkommen, so findet man

$$x = a^{e+f+g} + a^{e+f+g-1}(e\alpha + f\beta + g\gamma) - a$$

was sich auf $x = e\alpha + f\beta + g\gamma$ reducirt,

weil $e+f+g=1$ und $e+f+g-1=0$.

Dieses Resultat, dasselbe wie dies der mathematischen Hoffnung, zeigt daß die moralische Hoffnung genau denselben Werth hat, wenn die ungewissen Summen sehr klein in Verhältniß zu dem vorherigen Besitze sind, eine Folgerung, die man nie aus den Augen verlieren darf, und die auf gleiche Art aus allen Hypothesen hervorgeht, die man über die Wichtigkeit der ungewissen Summen aufstellen kann.

Folgendes sind die vorzüglichsten Anwendungen, die Daniel Bernoulli von seiner Formel macht.

Zusätze des Uebersetzers.

Beide die Buffonsche und Bernoullische Hypothese haben das gemein, daß sie die Wichtigkeit eines Gewinnes oder Verlustes durch das Verhältniß desselben zu dem übrigen Besitze schätzen; nur mit dem Unterschiede, das Buffon unmittelbar den ganzen Gewinn oder Verlust mit dem übrigen Vermögen vergleicht, Bernoulli aber denselben in kleine Theile zerlegt sich denkt, und jedem dieser Theile eine Wichtigkeit beilegt, die immer von dem vorherigen Besitze abhängt; daher hat nach ihm der letzte Theil des Gewinnes, weil das Vermögen durch die übrigen Theile vorher schon vergrößert ist, einen geringern Werth als jeder der übrigen Theile.

Setzen wir das Vermögen einer Person $= a$, und das durch gewisse Ereignisse veränderte Vermögen $= x$, so wird nach Bernoulli die Wichtigkeit dieser Veränderung ausgedruckt durch $k \text{ Log. } \frac{x}{a}$, die Veränderung mag zu Gunsten oder zum Nachtheil geschehen seyn; ersteres ist der Fall, wenn $x > a$ und da alsdenn $\frac{x}{a} > 1$, so ist $\text{Log. } \frac{x}{a}$ positiv; die Wichtigkeit eines Gewinnes wird folglich immer durch etwas positives angedeutet; letzteres ist der Fall, wenn $x < a$ an, da aber alsdann $\frac{x}{a} < 1$, so ist $\text{Log. } \frac{x}{a}$ negativ, und folglich wird die Wichtigkeit des Verlustes immer durch etwas negatives ausgedrückt.

Der Ausdruck $k \text{ Log. } \frac{x}{a}$ verwandelt sich, wenn man $x = a \pm \alpha$ setzt, in $k \text{ Log. } \frac{a \pm \alpha}{a}$ und α ist die Wichtigkeit eines Gewinnes $\alpha = k \text{ Log. } \frac{a + \alpha}{a}$ und die eines Ver-

lustes $\alpha = k \,\text{Log.}\, \frac{a-\alpha}{a}$. Bezeichnen wir die Wichtigkeit des Gewinnes α mit g, und die des Verlustes α mit v, so ist

$$v : g = \text{Log.}\, \frac{a-\alpha}{a} : \text{Log.}\, \frac{a+\alpha}{a} \text{ nämlich}$$

$$v : g = \text{Log.}\,(a-\alpha) - \text{Log.}\, a : \text{Log.}\,(a+\alpha) - \text{Log.}\, a$$

und wenn wir die Zeichen unbeachtet lassen und blos auf die Größe des Werthes sehen

$$v : g = \text{Log.}\, a - \text{Log.}\,(a-\alpha) : \text{Log.}\,(a+\alpha) - \text{Log.}\, a$$

Verlust und Gewinn verhalten sich also zu einander, wie die Differenzen der Logorithmen von zwei paar Zahlen, die gleiche Differenzen haben. Nun ist aber die Differenz der Logorithmen zweier Zahlen n und n + d desto kleiner, je größer n ist, folglich ist auch hier

$$\text{Log.}\,(a+\alpha) - \text{Log.}\, a < \text{Log.}\, a - \text{Log.}\,(a-\alpha).$$

und daher $g < v$. Dieselbe Summe hat also als Gewinn weniger Wichtigkeit als ihr zukömmt, wenn sie Verlust ist.

Die eigentliche Anwendung dieser Schätzung wird erst dadurch erhalten, wenn man eine Formel für die Glücksumstände desjenigen ausmittelt, der ungewisse Ereignisse erwartet. Das Aufsuchen dieser Formel ist der Zweck des §. 72., und die Gründe des dort angewendeten Verfahrens sind folgende:

Die Summe α hat für denjenigen, der ein Vermögen $= a$ besitzt, eine Wichtigkeit $= k \,\text{Log.}\, \frac{a+\alpha}{a}$. Dieser Ausdruck tritt aber erst alsdann ein, wenn das entsprechende Ereigniß wirklich geschehen ist, d. h. wenn die Wahrscheinlichkeit für dasselbe in Gewißheit übergeht, und also = 1

wird. So lange dieses noch nicht der Fall ist, muß diese Wichtigkeit mit der Wahrscheinlichkeit für α multiplicirt werden, und die Wichtigkeit ist daher, wenn die Wahrscheinlichkeit e beträgt $= k\,e\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\alpha}{a}$. Auf gleiche Art hat für den Besitzer von a die Summe β bei einer Wahrscheinlichkeit f die Wichtigkeit $k\,f\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\beta}{a}$, und die Summe y mit der Wahrscheinlichkeit g hat die Wichtigkeit $k\,g\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\gamma}{a}$. Sind nun die 3 Ereignisse α, β, γ die allein möglichen, von welchen eins geschehen muß, so ist $e+f+g=1$, und die Wichtigkeit der Erwartung für den Besitzer von a ist

$$k\left\{e\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\alpha}{a}+f\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\beta}{a}+g\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\gamma}{a}\right\}$$

der Einfluß, den diese Umstände auf das Vermögen a äußern, sey von der Art, daß a dadurch in X sich verwandelt, so ist nach der Grundformel die Wichtigkeit dieses Einflusses $= k\,\mathrm{Log.}\,\frac{X}{a}$ und daraus folgt

$$k\left\{e\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\alpha}{a}+f\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\beta}{a}+g\,\mathrm{Log.}\,\frac{a+\gamma}{a}\right\}=$$

$k\,\mathrm{Log.}\,\frac{X}{a}$, oder

$$\mathrm{Log.}\,(a+\alpha)^e\,(a+\beta)^f\,(a+\gamma)^g-\mathrm{Log.}\,a^{e+f+g}$$

$=\mathrm{Log.}\,X-\mathrm{Log.}\,a$ und weil $e+f+g=1$ so ist

$$(a+\alpha)^e\,(a+\beta)^f\,(a+\gamma)^g=X$$

gleich den Vermögensumständen desjenigen der obige Ereignisse erwartet.

Es versteht sich von selbst, daß wenn eines dieser Ereignisse z. B. β Verlust verursacht, $a-\beta$ statt $a+\beta$ gesetzt werden muß.

Die beständige Größe k, die der Formel beigefügt wurde, um nöthigen Falls Gebrauch davon machen zu können, verschwindet, woraus hervorgeht, daß überhaupt keine dritte Größe bei der Schätzung der Vermögensumstände einer Person, die ungewisse Ereignisse erwartet, Einfluß hat.

§. 73.

Zuerst sucht er die Umstände eines Spielers, der 100 Thlr. besitzt und die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, entweder 50 Thlr. zu gewinnen oder zu verlieren. In diesem Fall ist

$$e=\frac{1}{2},\ f=\frac{1}{2},\ g=0,\ a=100,\ \alpha=50,\ \beta=-50$$

und daher

$$X=(100+50)^{\frac{1}{2}}(50)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{50.150}=87.$$

Dieser Spieler hätte demnach einen Verlust von 13 Thlr. in seinen primitiven Umständen, dieser Verlust wird auf 6 Thlr. reducirt, wenn man $a=200$ annimmt.

§. 74.

In der 2ten Frage nimmt Bernoulli an, es werden einem Kaufmanne 800 Thlr. abgefordert, um ihm Waaren zu assecuriren, deren Werth auf 10000 Thlr. sich beläuft, und die vor ihrem Transporte über Meer einer Gefahr verloren zu gehen, ausgesetzt sind, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$ beträgt, ist es dem Kaufmanne zuträglich, diesen Vertrag einzugehen? Um hierüber zu urtheilen, wollen wir die physischen Glücksum-

stände dieses Kaufmanns vergleichen, wenn er die Gefahr des Transports auf sich nimmt, und wenn er die ihm angebotene Assecuranz annimmt. Wir wollen immer durch a das Vermögen bezeichnen, das er außer der in Frage stehenden Waare besitzt, und setzen

$$\alpha = 10000,\; e = \tfrac{19}{20},\; f = \tfrac{1}{20};$$

der allgemeine Ausdruck für X giebt im ersten Falle

$$(a + 10000)^{\frac{19}{20}}\; a^{\frac{1}{20}}$$

und im 2ten Falle a + 9200, wo er einen gewissen Verlust von 800 Thlr. erleidet. Nachdem nun

$$(a + 10000)^{\frac{19}{20}}\; a^{\frac{1}{20}}$$

kleiner oder größer als a + 9200 ist, wird die angebotene Assecuranz dem Kaufmanne moralisch vortheilhaft oder nachtheilig seyn.

Hieraus ergiebt sich eine Bestimmung von a oder desjenigen, was er im Vermögen haben muß, um diese Assecuranz verwerfen zu können; es ist dies der Werth von a, welcher aus der Gleichung sich ergiebt

$$(a + 10000)^{\frac{19}{20}}\, a^{\frac{1}{20}} = a + 9200$$

denn sie ist die Grenze, in welcher der Vortheil von dem Nachtheile sich scheidet. Diese Gleichung in Beziehung auf den Buchstaben a nach dem Verfahren behandelt, welches dazu dient, nummerische Gleichungen durch Näherung zu lösen, giebt a = 5043. So lange der Kaufmann weniger als diese Summe besitzt, schreibt die Bernoullische Formel ihm vor, sich die Waaren assecuriren zu lassen.

Bei dieser Formel ist es nicht so, wie bei der der mathematischen Hoffnung, hier sind die Bedingungen für jeden der Spieler nicht gleich; auch sucht Bernoulli, um die Auflösung dieser Aufgabe vollständig zu machen, das Ver-

mögen auf, was derjenige besitzen muß, der die Gefahr auf sich nehmen will. Bezeichnet man dieses Vermögen mit b, so findet man den physischen Werth der Glücksumstände des Versicherers als Folge seiner Speculation

$$(b+800)^{\frac{19}{20}}(b-9200)^{\frac{1}{20}}$$

und setzt man dieses $=b$, so erhält man

$$(b+800)^{\frac{19}{20}}b-9200)^{\frac{1}{20}}=b$$

wodurch ein Werth von b sich ergeben muß, so daß wenn er weniger besitzt, es unrecht von ihm seyn würde, sich in diese Speculation einzulassen; diese Summe ist 14243 Thlr. Er müßte wenigstens 29878 Thlr. besitzen, um dem Kaufmann nicht mehr als 600 Thlr. anstatt der 800 Thlr. abfordern zu können, wenn die Gefahr dieselbe bleibt; und dieser würde unrecht thun, dieses Anerbieten zu verwerfen, so lange sein Vermögen sich nicht auf 20478 Thlr. beläuft. Man findet diese Zahlen, wie die obigen, wenn man 600 anstatt der 800 substituirt.

§. 75.

Berücksichtigt man nur den Werth der mathematischen Hoffnung, so ergiebt sich, daß es gleichgültig ist, ob man eine Summe bei einem einzigen Zufalle wagt oder sie auf mehrere vertheilt, die dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, z. B. die Waare auf ein einziges Schiff zu verladen oder sie auf mehrere zu vertheilen, wenn die Gefahr des Verlustes für alle Schiffe dieselbe ist. Denn bedeutet a den Werth der Waare, r die Zahl der Schiffe, von welchen unter $m+n$ gerade n verloren gehen, so sind alle Fälle ihrer Ankunft in der Formel enthalten

$$(m+n)^r=m^r+\frac{r}{1}m^{r-1}n+\frac{r(r-1)}{1.2}m^{r-2}n^2+$$

$$\frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}m^{r-3}n^3 + \text{ꝛc.}$$

Ist die Ladung auf r Schiffe vertheilt, so beträgt der Werth, wenn alle Schiffe ankommen $\frac{ra}{r}$, kommen $r-1$ an, $(r-1)\frac{a}{r}$ u. s. w. Multiplicirt man mit diesen Summen die ihnen entsprechenden Glieder, so sieht man leicht, daß das Produkt beträgt

$$ma\left(m^{r-1} + \frac{r-1}{1}m^{r-2}n + \frac{(r-1)(r-2)}{1\,.\,2}m^{r-3}n^3 + \text{ꝛc.}\right) = ma(m+n)^{r-1}$$

und theilt man es durch $(m+n)^r$, so erhält man $\frac{ma}{m+n}$ als mathematische Hoffnung, eben so als hätte man nur ein einziges Schiff genommen.

Die Bernoullische Formel scheint mehr mit der allgemeinen Meinung übereinzustimmen, die dafür ist, die gefährdete Summe zu vertheilen. Um es zu beweisen, bestimmt er nach und nach die Umstände eines Kaufmannes, der 4000 Thlr. besitzt, und für 8000 Thlr. Waare über Meer erwartet, und diese Waare entweder auf 1 oder auf 2 Schiffe, deren wahrscheinliche Ankunft $\frac{9}{10}$ beträgt, verladet. In dem erstern Fall ist der Werth der physischen Glücksumstände dieses Kaufmannes

$$(12000)^{\frac{9}{10}}(4000)^{\frac{1}{10}} = 10751$$

Der 2te Fall, welcher 3 zusammengesetzte Ereignisse darbietet, deren Wahrscheinlichkeiten $(\frac{9}{10})^2$, $2 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}$, $(\frac{1}{10})^2$ sind, (§. 20.) und wo $\alpha = 8000$, $\beta = 4000$, $\gamma = 0$, giebt

$$(12000)^{\frac{81}{100}}(8000)^{\frac{18}{100}}(4000)^{\frac{1}{100}} = 11033.$$

Zieht man von diesen Summen 4000 Thlr. als den vorherigen Besitz des Kaufmanns ab, so erhält man 6751 und 7033 für die moralischen Werthe der ungewissen Summen, die er erwartet. Durch die Formel für die mathematische Hoffnung findet man $8000 \times \frac{9}{10} = 7200$, eine Summe, die größer ist, der sich aber die aus der Bernoullischen Formel hervorgehenden Resultate um so mehr nähern, je größer die Anzahl der Schiffe ist, auf die man die Waare vertheilt.

§. 76.

Dieser Geometer beschließt die Abhandlung, von welcher ich einen Auszug mittheile, mit der Auflösung einer Aufgabe, die zuerst Zweifel erregte, über die von den Erfindern der Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne weitere Prüfung angenommene Schätzung der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Sie wurde Montmort durch Nicolaus Bernoulli vorgelegt,*) und erhielt den Namen Petersburger Problem ohne Zweifel aus dem Grunde, weil Daniel Bernoulli sie in den Memoires der Academie dieser Stadt anzeigte. Man findet davon folgende Angabe: Peter erbietet sich eine Münze in die Luft zu werfen, und verspricht an Paul 1 Ducaten, wenn bei dem ersten Wurfe, nachdem die Münze zur Erde gefallen ist, das Wappen zu oberst liegt; ist dieses erst bei dem 2ten Wurf der Fall, so will er ihm 2 Ducaten geben, 4 wenn es erst bei dem 3ten Wurfe der Fall ist u. s. f., so daß bei jedem folgenden Wurf die Summe immer verdoppelt wird. Man soll die Umstände von Paul bestimmen. Dieses Spiel heißt im französischen Croix ou pile (Wappen oder Schrift im

*) Analyse des Jeux de hasard, p. 402. 5te Aufgabe.

deutschen), es kömmt dem Wurfe eines Würfels gleich, der nur 2 Seiten hat.

Wendet man die Rechnung bei obigen Bedingungen an, so findet man für Paul

die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots \frac{1}{2^n}$

zu gewinnen $1, 2, 4 \ldots 2^{n-1}$ Ducaten

wenn Wappen fällt beim 1ten, 2ten, 3ten....nten Wurf

die mathematische Hoffnung seines Gewinnes hat daher einen Werth von

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} 2^{n-1} = \frac{n}{2}.$$

Da es nun aber nicht unmöglich ist, daß Wappen erst nach einer Anzahl Würfen erscheint, die größer ist als jede beliebige angebbare Zahl, folgt also hieraus nicht, daß, bevor das Spiel beginnt, man diese unendliche Zahl annehmen müsse? Der Einsatz von Paul muß also unendlich seyn; aber welcher vernünftige Mensch wird bei diesem Spiele nicht eine unendliche Summe, das ist absurd, sondern selbst nur einigermaßen bedeutende Summen wagen. Dieses ist das Paradoxon, welches die Geometer zu erklären oder zu vermeiden gesucht haben.

Einige glaubten alle Schwierigkeiten zu heben, wenn sie entweder eine so große Summe als Maximum des Gewinnes festsetzten, daß alles, was zu dieser Summe noch hinzu kommen könnte, weil davon sich auch nicht der geringste Gebrauch machen ließ, als absolut unnütz angesehen werden könnte, oder besser, wenn sie eine so geringe Wahrscheinlichkeit festsetzten, daß sie als Null, und das dieser Wahrscheinlichkeit entsprechende Ereigniß als unmöglich angesehen werden könnte. Durch die erstere Betrachtung muß das Ende des Spiels bei dem Wurfe angenommen werden, von welchem der Gewinn die Summe beträgt, die als Grenze dessen, was noch nützlich zu besitzen ist, angesehen werden kann. Cramer nimmt für diese Grenze die Zahl

$$2^{24} = 16777216$$

und dabei den Thaler als Einheit an. Setzt man dafür den Ducaten, der in der Aufgabe als Einheit gebraucht ist, so endigt das Spiel bei dem 25sten Wurf, und der Einsatz von Paul beschränkt sich auf $12\frac{1}{2}$ Ducaten. Sieht man aber jede Vermehrung der Summe 2^{24} als überflüssig an, warum sollte man sich nicht eben so gut auf die Summe $2^{24}-1$, die so wenig von jener verschieden ist, beschränken können; und fährt man so fort, wo soll man aufhören?

Wollte man das Spiel bei dem Wurfe beendigen, wo die Wahrscheinlichkeit daß Wappen erschienen seyn müsse, der Einheit sehr nahe kömmt, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit so klein ist, daß sie als Null angesehen werden könnte, und $\frac{1}{10000}$ als diese annehmen, so müßte das Spiel bei dem 13ten Wurfe endigen, da die Wahrscheinlichkeit Wappen erst bei dem 14ten Wurfe zu treffen $\frac{1}{16384}$ beträgt. Bei dieser Bestimmung würde der Einsatz von Paul nur $6\frac{1}{2}$ Ducaten betragen; sieht man aber die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10000}$ als Null und nimmt den Bruch $\frac{9999}{10000}$ für die moralische Gewißheit, wie Buffon will, was soll man von den Wahrscheinlichkeiten $\frac{9998}{9999}$ und $\frac{10000}{10001}$, die so wenig von jener verschieden sind, behaupten? Es ist also unmöglich feste Grenzen bei Werthbestimmungen anzugeben, die immer noch eine Ausdehnung zulassen. Ich werde auf diesen Gegenstand wieder zurück kommen; aber was ich so eben angeführt habe, ist hinreichend, um mit Daniel Bernoulli und Condorcet zu schließen, daß obige Erklärungen seichte sind.

§. 77.

Die Bernoullische Formel dringt besser in die Schwierigkeiten ein, weil sie das Ende des Spiels nicht zum Voraus bestimmt. Bezeichnet man das Vermögen von Paul mit a, und das was er zum Spiele setzen soll, durch x, so besitzt er, wenn Wappen erscheint

beim 1ten Wurf $a-x+1$; beim 2ten $a-x+2$;
beim 3ten $a-x+4$

welchem $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$

als die Wahrscheinlichkeiten entsprechen, dieses giebt die physischen Glücksumstände nach den Bedingungen des Spiels

$$X = (a-x+1)^{\frac{1}{2}} (a-x+2)^{\frac{1}{4}} (a-x+4)^{\frac{1}{8}} \text{ꝛc.}$$

was dem vorherigen Besitz a gleich seyn muß, wenn man ausdrücken will, daß die Umstände des Spielers sich nicht geändert haben; man erhält daher die Gleichung

$$a = (a-x+1)^{\frac{1}{2}} (a-x+2)^{\frac{1}{4}} (a-x+4)^{\frac{1}{8}} \text{ꝛc.}$$

von welcher der 2te Theil eine unendliche Anzahl Factoren enthält.

Man kann nicht leicht aus einer solchen Gleichung die Werthe von x finden, setzt man aber $a-x=a'$, so ist

$$a = (a'+1)^{\frac{1}{2}} (a'+2)^{\frac{1}{4}} (a'+4)^{\frac{1}{8}} (a'+8)^{\frac{1}{16}} \text{ꝛc.}$$

und diese Gleichung führt zu dem Werthe von a durch den von a', woraus man alsdann den von x finden kann. Man kann diese Gleichung auch unter die Form bringen

$$a = 1^{\frac{1}{2}} . 2^{\frac{1}{4}} . 4^{\frac{1}{8}} . 8^{\frac{1}{16}} . \text{ꝛc.} \times$$
$$(1+a')^{\frac{1}{2}} \left\{1+\frac{a'}{2}\right\}^{\frac{1}{4}} \left\{1+\frac{a'}{4}\right\}^{\frac{1}{8}} \left\{1+\frac{a'}{8}\right\}^{\frac{1}{16}} \text{ꝛc.}$$

wo die Factoren des 2ten Theils immerwährend abnehmen und die Einheit zur Grenze haben, denn in ihrem allgemeinen Ausdrucke

$$2^{\frac{n-1}{2^n}} \text{ und } \left\{1+\frac{a'}{2^{n-1}}\right\}^{\frac{1}{2^n}}$$

nähert der Exponent sich der Null immer mehr und mehr.

Bedient man sich der Logarithmen, so ist

$$\text{Log. } a = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{16} + \text{ꝛc.}) \text{ Log. } 2$$

$$+ \tfrac{1}{2} \text{ Log. } (1 + a') +$$

$$\tfrac{1}{4} \text{ L. } \left\{1 + \frac{a'}{2}\right\} + \tfrac{1}{8} \text{ Log. } \left\{1 + \frac{a'}{4}\right\} + \tfrac{1}{16} \text{ Log. } \left\{1 + \frac{a'}{8}\right\} \text{ ꝛc.}$$

Die Reihe, womit Log. 2 multiplicirt ist, läßt sich umwandeln in

$$\tfrac{1}{4}(1 + 2(\tfrac{1}{2}) + 3(\tfrac{1}{2})^2 + \text{ꝛc.}) = \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{1}{2})^{-1} = 1$$

diese Reihe hat daher Log. 2 zur Grenze. Was den übrigen Theil der Gleichung anbelangt, so wird er sehr convergirend, wenn a' nicht beträchtlich ist, und strebt sich in eine geometrische Progression zu verwandeln, denn der Logarithmen von $1 + z$ nähert sich immer mehr und mehr z selbst proportionirt zu werden, wenn diese Größe ein Bruch ist, der immerwährend abnimmt; und wenn $\text{Log.}(1 + z) < 0{,}4342$, so ist es leicht sich zu überzeugen, daß der Werth von a endlich bleibt, so lange a' endlich ist, wodurch das paradoxe verschwindet.

Setzt man $a' = 0$, so erhält man $a = 2$; das will sagen, wenn Paul nur 2 Ducaten im Vermögen hat und sie im Spiele setzt, der moralische Werth seines Vermögens sich nicht ändert. Setzt man $a - x = 100$ und benutzt 10 Glieder, so findet man $a = 104{,}38$ auf $\tfrac{1}{100}$ genau, dieses giebt $x = 4{,}38$. *)

---

*) Die Ansicht, die Cramer von diesem Problem hatte, findet man in einem Briefe, den er 1728 an Nicolaus Bernoulli schrieb und der deutsch in dem Hamburger Magazin erstern Bds. 5tes Stück abgedruckt ist, wo Seite 73—90 ein Auszug aus der Abhandlung von Daniel Bernoulli, „Versuch einer neuen Lehre von dem Maaße der Glücksspiele," sich befindet.

§. 78.

Folgt wohl daraus, weil die Formel des Daniel Bernoulli sehr gut den verschiedenen Versuchen entspricht, die wir damit gemacht haben, daß man sie anstatt der der mathematischen Hoffnung setzen müsse? Condorcet und vor ihm Nicolaus Bernoulli (Neffe von Johann) waren nicht der Meinung. Folgendes sind ihre Gründe: Nicolaus Bernoulli sah in den Resultaten der erstern dieser Formeln nur gute Rathschläge, um Personen aufzuklären, die sich auf Speculationen des Zufalls einlassen wollen, nicht aber Regeln, um eine gleiche Theilung unter den Spielern

---

Er sagt in dieser Abhandlung „Ferner theilt mir derselbe (Nicolaus Bernoulli) die Gedanken des Herrn Cramers von dieser Schwierigkeit mit, die dieser schon einige Jahre vorher gehegt hat, ehe ich meine Abhandlung schrieb. Ich habe dieselben mit den meinigen dergestalt gleichförmig gefunden, daß es zu verwundern ist, wie wir beide in einer solchen Sache so genau haben übereinkommen können.“ — Ueber diesen Gegenstand verdient auch eine Abhandlung von G. Ch. Lichtenberg nachgelesen zu werden. Sie hat die Ueberschrift: „Betrachtungen über einige Methoden eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Spiele zu heben,“ und befindet sich in seinen vermischten Schriften nach dessen Tode herausgegeben von L. Chr. Lichtenberg und Fr. Kries 9ter Bd. der physikalischen und mathematischen Schriften 4ter Bd. Seite 3—46. Er widerlegt vorzüglich die von d'Alembert und Beguelin gegen die Bernoullische Hypothese aufgeworfenen Zweifel. Es verdient aus derselben besonders angeführt zu werden, daß er die beiden Seiten der zu werfenden Münze mit 1 und 0 bezeichnet, so daß 1 geworfen werden soll. Man erhält hierdurch, wenn man die Würfe von der Rechten zur Linken mit diesen Zeichen anmerkt, den Ausdruck nach der Leibnitzischen Dyadick für das, was Peter zuletzt dem Paul auszahlen muß. Auch können aus diesem Umstande noch mehrere interessante Folgen abgeleitet werden. U.

zu bewerkstelligen. Daniel Bernoulli, der uns mit dieser Meinung von Nicolaus bekannt gemacht hat, erklärt selbst zu Anfang seiner Abhandlung, daß ein Tribunal andere Grundsätze befolgen müsse, als die, welche seiner Formel zu Grunde liegen. Setze zwei Spieler in eine solche Lage, daß keiner von beiden vor dem andern was voraus hat, ist die Regel der Wetten, und auch die, welche die strengste Justiz vorschreibt. *) Die Bernoullische Formel, die im Gegentheil einen Unterschied zwischen beiden Spielern macht, da sie den ärmern begünstigt, hebt alle Bedingungen des Spiels auf. Die eine Partie, indem sie ihr Interesse und ihre besondere Lage berücksichtigt, kann darauf kommen, daß es, weil Verlust ihr einen größern Schaden zufügt, vortheilhaft seyn würde, den Einsatz zu vermindern und den Gewinn zu vermehren; kann die andere Partie aber hiermit zufrieden

---

*) Quod cum nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat uni quam alteri, unicuique aequae sint adjudicandae partes; rationes autem nullas considerari, quae personarum statum respiciant, solasque illas perpendi, quae ad conditiones sortis pertineant. Talem sententiam ferant judices supremi publica auctoritate constituti, at vero hoc loco non judicia sed consilia danda sunt; regulae nempe, quibus quisque suam sibimet estimare debeat sortem pro diversa rerum suarum constitutione. Unter dieser Ansicht stellt Daniel Bernoulli seine Grundsätze auf (pag. 175—176. der angeführten Abhandlung).

Von dem Briefe des Jacob Bernoulli führt er folgendes an: Is vero testatus est nequaquam sibi displicere meam de mensura sortium sententiam, si modo quivis suae sortis aestimator sit, aliter vero si rem habere, si tertius instar judicis secundum equitatem et justitiam unicuique collusorum sortem assignare debeat. Und er fügt hinzu Id ipse pariter in §. 2. exposui (pag. 189—190 der angeführten Abhandlung.)

seyn? Der Nachtheil würde ohne Zweifel nicht groß seyn, wenn aus dieser Schwierigkeit ein verringerter Geschmack am Spiele folgte; aber um über den Werth der Bernoullischen Formel richtig zu urtheilen, muß man untersuchen, ob die gewöhnliche Theorie der Wahrscheinlichkeiten nicht eben so gut die Rathschläge begründet, die der gemeine Menschenverstand an die Hand giebt.

Da diese Theorie die Nothwendigkeit bezeugt, die Versuche des Zufalls immer mehr und mehrmalen zu wiederholen, um einigermaßen bedeutende Wahrscheinlichkeiten zu erreichen, daß nicht mehr als ein gewisser Theil, nicht etwa des ersten Einsatzes, sondern der ganzen Summe aller Einsätze §. 63. verloren gehen werde, einer Summe, die immerwährend wächst; folgt daraus nicht natürlich der Rath, keine bedeutende Summe bei einem selbst gleichen Spiele zu wagen, wenn man den Versuch nicht öfters wiederholen kann, und folglich jedesmal nur einen sehr kleinen Theil von dem zu setzen, was man besitzt? Die Bernoullische Formel, sagt man, thut mehr, sie giebt ein genaues Maaß des Einflusses, den dieser Rath auf die Spieler ausüben soll. Hierauf kann man erwiedern, was schon §. 69. gesagt worden ist, daß man den numerischen Werthen, welche aus Hypothesen abgeleitet sind, die auf so viel verschiedne Arten verändert werden können, keine größere Wichtigkeit beilegen müsse, als sie wirklich haben; und Daniel Bernoulli liefert mir hierzu selbst den Beweiß. Er bemerkt, daß ein von Glücksgütern entblößter Mensch, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, eine Summe von 20000 Fr. z. B. zu gewinnen, unrecht thun würde, diese Hoffnung nicht für 9000 Fr. hinzugeben, obgleich sie nach der gewöhnlichen Regel einen Werth von 10000 Fr. hat. Wir wollen sehen, was die seinige giebt. Es bedeute a immer den vorherigen Besitz, so sind die physischen Glücksumstände desjenigen, der die Hoffnung auf obigen Gewinn hat,

$$(a+20000)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$$

Erinnern wir uns nun, daß a nie Null werden kann §. 70., und setzen a = 500 Fr., was bedeutend geringer ist, als das schwächste Kapital, das dem Werthe des jährlichen Fleißes eines Menschen entspricht; so finden wir $\sqrt{500 . 20500} = 3202$ ungefähr, hiervon 500 abgezogen, bleibt 2702 Fr., viel weniger als 10000 Fr., aber können wir sagen, daß dieses das wenigste sey, was er für seine Hoffnung nehmen könne? Kann er sich nicht in einer Lage befinden, die es ihm zur Pflicht macht, mit weniger noch zufrieden zu seyn? Sagt nicht Bernoulli selbst mit Recht, daß 2400 Thlr. für einen Menschen, der schon eben soviel besitzt, der deren aber 4800 bedarf, um seine Freiheit wieder zu erlangen, einen viel größern Werth haben, als für jemand, der nichts besitzt, aber frei ist. Dergleichen Umstände können der Rechnung nicht unterworfen werden, und es heißt die Formeln mißbrauchen sie auf dergleichen Bestimmungen anwenden zu wollen. Um darüber Rechenschaft abzulegen, wie im vorliegenden Falle 10000 Fr. die mathematische Hoffnung vorstellen können, muß man berücksichtigen, daß dieser Zufall sich eine große Anzahlmal wiederholen könne, woraus sich immer wahrscheinlicher ergeben wird, daß die Verluste und Gewinne gegen einander gehalten, ungefähr 10000 Fr. als den mittlern Werth des endlichen Resultats geben werden.

§. 79.

Wenn also die Formel für die mathematische Hoffnung als mittlerer Werth der Gewinne und Verluste betrachtet wird, so kann sie auch nur so lange angewendet werden, als ein solcher Werth statt findet, der die Stelle des reellen Werths, welcher unbekannt ist, vertritt; dieses findet aber bei dem Petersburger Probleme §. 76. nicht statt. Ein Spiel, dessen Entscheidung eine unendliche Zahl von

Würfen umfaßt, und das folglich nicht als eins angesehen werden kann, das Wiederholungen zuläßt, giebt aus dieser Ursache auch keinen mittlern Werth des Ereignisses, das es hervorbringen kann. Man braucht auch nicht einmal die Grenze bis zum Unendlichen hinauszurücken, um das absurde zu erkennen, das statt findet, wenn man von dem mittlern Werthe Gebrauch machen will. Man hat gesehen, daß Paul nur $6\frac{1}{2}$ Ducaten zu setzen braucht, wenn man sich auf 13 Würfe beschränkt; aber wird Wappen nicht früher geworfen, so muß Peter $2^{12}=4096$ Ducaten bezahlen, eine Summe, deren Verlust nur durch den Gewinn einer so großen Anzahl Partien ersetzt wird, daß man dafür gar keine vernünftige Hoffnung hegen kann. Geht man bis zu dem 27sten Wurf, und nimmt nur 1 Centime als Einheit an, so beträgt der Einsatz von Paul nicht mehr als $13\frac{1}{2}$ Centimes und Peter könnte 1342177,28 Fr. verlieren, die Wahrscheinlichkeit dieses Verlustes $\frac{1}{2^{27}}$ ist zwar außerordentlich klein, aber doch noch immer nicht Null.

Die Formel der mathematischen Hoffnung, gehörig verstanden §. 61., scheint hiernach mit den richtigsten Begriffen über das Spiel übereinzustimmen, führt zu den Folgerungen dieser Begriffe und stärkt die Klugheitsmaßregeln, indem sie immer zu der Nothwendigkeit führt, nur geringe Summen auf einmal zu wagen, und erlaubt so nur das Spiel als Unterhaltung, ohne daß es üble Folgen haben könne, anzusehen. Sobald man sich von dieser weisen Vorsicht entfernt, kann sie nur noch eine genaue Gleichheit der Gefahr unter solchen leidenschaftlichen Menschen herstellen, von welchen jeder auf den Ruin des andern denkt. Es ist eine Art Zweikampf, bei welchem man die Waffen gleich machen muß; denn nach den sehr richtigen Bemerkungen von Condorcet ist der Zweck bei Schätzung der vom Zufalle abhängenden Ereignisse erreicht, wenn die Spieler in gleichen Umständen sich befinden: aber man kann

es nicht dahin bringen, daß die Umstände eines Menschen, wenn er spielt, dieselben sind, als wenn er nicht spielt.

Wenn hiernach die Klugheit erlaubt, sich auf Spekulationen des Zufalls einzulassen, so kann es nur bei solchen seyn, die ihrer Natur nach mehr für sich haben als die Wahrscheinlichkeiten für die mathematische Hoffnung ausdrücken. Also nach den Bemerkungen des §. 64., je mehr das Unternehmen wiederholt wird, desto mehr wird die Wahrscheinlichkeit des Erfolges vergrößert. Aehnliche Speculationen bei dem eigentlichen Spiele verletzen die Gesetze der Wahrscheinlichkeit; und wenn besondere Rücksichten den Regierungen erlauben sie zu dulden, so muß die strengere öffentliche Meinung sie in Abnahme zu bringen suchen. Aber es ist etwas ganz anderes bei den Speculationen im Handel, den Assecuranzen und allen Unternehmungen, wo der Vortheil als Belohnung für nützliche Arbeit und als Austausch reeller Werthe angesehen werden muß.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori, nämlich wenn die Gesammtzahl aller Fälle unbegrenzt ist, und ihr Verhältniß zu der Zahl der Fälle jeder Art sich nicht angeben läßt.

§. 80.

Kennt man die Form des Würfels oder die Bedingungen der Urne nicht, die die beobachteten Ereignisse hervorbringt, so muß man, um zu ihrer Wahrscheinlichkeit zu gelangen, alle Formen oder Bedingungen betrachten, durch die sie hervorgebracht werden können, um hieraus eine Art mittlere Wahrscheinlichkeit abzuleiten, die sich um so mehr der wahren nähern wird, je größer die Zahl der Beobachtungen ist. (§. 40.)

Hat man z. B. aus einer Urne nach und nach 3 weiße Kugeln und eine schwarze gezogen, und dabei jedesmal die gezogne Kugel wieder in die Urne gethan, und man weiß, daß die Anzahl aller Kugeln 4 beträgt, weiße und schwarze zusammen genommen, aber man ist ungewiß, wieviel sie von jeder Farbe enthält, so können über die Bedingungen dieser Urne folgende 3 Hypothesen aufgestellt werden:

3 weiße Kugeln, 1 schwarze, daher $e=\frac{3}{4}$, $f=\frac{1}{4}$,
2 „ „ 2 „ „ $e=\frac{2}{4}$, $f=\frac{2}{4}$,
1 „ „ 3 „ „ $e=\frac{1}{4}$, $f=\frac{3}{4}$,

wo e die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen, und f die für das Ziehen einer schwarzen Kugel bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses 3 weiße Kugeln und eine schwarze zu ziehen, welche durch $4e^3f$ ausgedrückt ist (§. 22.) wird nach und nach

$$\frac{27}{64}, \frac{16}{64}, \frac{3}{64}.$$

Die letztere Hypothese, die die kleinste Wahrscheinlichkeit für dies zusammengesetzte Ereigniß giebt, ist auch an und für sich bei weitem weniger wahrscheinlich, als die beiden übrigen Hypothesen, denn wenn die Urne nicht mehr als eine einzige weiße Kugel enthielte, so müßte dieselbe Kugel 3 mal nacheinander gezogen werden. Man begreift, daß bei weitem weniger Schwierigkeit statt findet, wenn sie 2 weiße Kugeln enthält und noch weniger, wenn sie deren 3 in sich faßt. Die Leichtigkeit, mit welcher jede Hypothese die beobachteten Ereignisse herbei führt, giebt natürlich die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese; denn je mehr dem Hervorbringen dieses Ereignisses günstige Verbindungen sie enthält, desto mehr Gelegenheit hat man das Urtheil der Möglichkeit desselben zu wiederholen (§. 5 und 6.). Daher hat man den Grundsatz aufgestellt: die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen (oder der Hypothesen) sind den Wahrscheinlichkeiten, die diese Ursachen für die beobachteten Ereignisse geben, proportionirt.*)

---

*) Diese Behauptung befindet sich in dem VI. Bde. des Savans étrangers. Bayer in den philosophischen Transactionen von 1763 (p. 370.) und Price in denen von 1764 (p. 296.) haben

In dem gegenwärtigen Beispiele sind die 3 aufgestellten Hypothesen den Zahlen 27, 16, 3 proportionirt; ihre Summe muß überdies, da eine von diesen Hypothesen nothwendigerweise statt findet, der Einheit gleich seyn, daher folgt, daß jede dieser Wahrscheinlichkeiten der ihr entsprechenden Zahl durch die Summe aller 3 Zahlen getheilt, gleich seyn muß, wodurch die Brüche erhalten werden

$$\frac{27}{46}, \frac{16}{46}, \frac{3}{46}.$$

Man kann auch sagen, daß unter den Combinationen, die durch die gesammten Hypothesen gebildet werden, die $27 + 16 + 3 = 46$, welche mit den geschehenen Ereignissen zusammenstimmen, die allein möglichen sind, und daß die Wahrscheinlichkeit einer jeden Hypothese eben so wie die eines Ereignisses bestimmt wird, indem man die Zahl der Fälle, bei welchen sie statt finden kann, durch die Zahl aller möglichen Fälle theilt, was dieselben Brüche wie oben giebt.

Endlich muß noch bemerkt werden, daß diese Brüche oder die Wahrscheinlichkeiten der verschiednen Hypothesen sich bilden, wenn man die in jeder Hypothese berechnete Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses durch die Summe seiner Wahrscheinlichkeiten in allen Hypothesen theilt.*)

---

schon diesen Gegenstand behandelt; aber Laplace hat ihn zuerst auf die analytische Form gebracht, in welcher man ihn gegenwärtig vorträgt, und die um vieles die Anwendungen erleichtert und allgemeiner macht.

*) Indem Condorcet, von dem ich es entlehnt habe, dieses Beispiel behandelt, (Elemens des Calcul des Probabilités p. 65.) nimmt er fünf Hypothesen an, nämlich alle die möglich sind, wenn man nicht auf die beobachteten Ereignisse Rücksicht nimmt;

Es ist leicht einzusehen, daß diese Regel allgemein ist, denn bezeichnet man durch h, h′, h″, h‴ die Wahrscheinlichkeiten der verschiednen Hypothesen, durch welche das statt gehabte zusammengesetzte Ereigniß hervorgebracht werden kann, und durch a, a′, a″, a‴ die Wahrscheinlichkeiten, die jede Hypothese für dieses Ereigniß giebt, so ist

$$h + h' + h'' + h''' = 1$$

$$h : h' : h'' : h''' = a : a' : a'' : a'''$$

und folglich wenn man $a + a' + a'' + a''' = T$ setzt

$$h = \frac{a}{T},\ h' = \frac{a'}{T},\ h'' = \frac{a''}{T},\ h''' = \frac{a'''}{T}.$$ *)

§. 81.

Hat man einmal die Wahrscheinlichkeit einer jeden möglichen Hypothese gefunden, so kann man leicht die Wahr-

---

denn man kann ja auch annehmen, daß alle 4 Kugeln weiß, oder daß sie sämmtlich schwarz sind, da aber weder die eine noch die andere dieser beiden letzten Hypothesen die beobachteten Ereignisse hätte hervorbringen können, so ist ihre Wahrscheinlichkeit = o, wodurch also nichts in den oben erhaltenen Resultaten geändert wird.

*) Die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen verhalten sich zu einander wie die der beobachteten Ereignisse in diesen Hypothesen, daher $h : h' = a : a'$ also $h : a = h' : a'$ und allgemein $h : a = h' : a' = h'' : a'' = h''' : a'''$ folglich nach Euklid Buch 5 Satz 12

$h + h' + h'' : h''' + a + a' + a'' + a''' = h : a = h' : h'$ etc.

nämlich $1 : T = h : a = h' : a'$

und daher $h = \frac{a}{T}$, $h' = \frac{a'}{T}$ etc.

scheinlichkeit für die Ereignisse bei den folgenden Zügen daraus ableiten, in unserer Aufgabe z. B. bei dem 5ten Zuge eine weiße oder eine schwarze Kugel zu ziehen. Es ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe auf die des §. 19. zurückgeführt werden kann, und sich durch die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit auflösen läßt. Die drei aufgestellten Hypothesen können als drei verschiedne Urnen angesehen werden, so daß aus einer von diesen das erwartete Ereigniß nothwendig hervorgehen muß. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist daher aus denen, die es in jeder Hypothese hat, multiplicirt mit der der Hypothese selbst, zusammengesetzt. Daher erhält man für das Herauskommen einer weißen Kugel bei dem 5ten Zuge

$$\frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4} + \frac{116}{184}$$

und für das Herauskommen einer schwarzen Kugel

$$\frac{27}{46} \cdot \frac{1}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{3}{4} = \frac{68}{184}$$

Man wird für jedes andere Beispiel auf gleiche Art finden, daß die Wahrscheinlichkeit eines neuen einfachen Ereignisses erhalten wird, wenn man aus den vorhergehenden Ereignissen die Wahrscheinlichkeit der verschiednen möglichen Hypothesen berechnet, und die Summe der Producte dieser Wahrscheinlichkeiten mit denen des Ereignisses in jeder Hypothese besonders multiplicirt, nimmt.

§. 82.

Um allgemeine Formeln nach den oben aufgestellten Grundsätzen zu construiren, muß man zuvörderst beachten,

daß bei den natürlichen Ereignissen die Gesammtzahl der Fälle als unendlich angesehen werden muß, oder alle einfache Wahrscheinlichkeiten, nämlich alle zwischen 0 und 1 enthaltenen Verhältnisse als möglich, so lange man über die wahren oder enger beschränkten Grenzen, in welchen sie eingeschlossen seyn können, in absoluter Unwissenheit sich befindet. Man muß also durch eine Anzahl Hypothesen, die als unendlich angesehen werden kann, die Wahrscheinlichkeiten des zusammengesetzten Ereignisses, welches statt gehabt hat, bestimmen, und dazu kann man auf folgende Art gelangen:

A und B sollen 2 einander entgegengesetzte Ereignisse seyn, von welchen das eine m mal und das andere n mal sich zugetragen hat. Man nehme an, die Einheit sey in sehr kleine Theile getheilt, die durch α vorgestellt werden, und bedenke, daß die einfache Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A durch irgend ein Glied der Reihe

$$\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 4\alpha \text{ ꝛc.}$$

ausgedrückt werden kann, endlich bezeichne man der Kürze wegen durch C den Coefficienten des Gliedes, welches in der Reihe von $(e+f)^{m+n}$ den Factor $e^m f^n$ enthält. Dieses vorausgesetzt, so bilden die verschiednen Wahrscheinlichkeiten des zusammengesetzten Ereignisses von m mal A und n mal B folgende Reihe

$$C\alpha^m(1-\alpha)^n,\ C(2\alpha)^m(1-2\alpha)^n,\ C(3\alpha)^m(1-3\alpha)^n \ldots$$
$$\ldots\ C(1-\alpha)^m\alpha^n$$

von welchen jedes beliebige Glied durch $Cx^m(1-x)^n$ vorgestellt werden kann. Die Summe

$$C(\alpha^m(1-\alpha)^n+(2\alpha)^m(1-2\alpha)^n+(3\alpha)^m(1-3\alpha)^n$$
$$\ldots\ldots\ldots+(1-\alpha)^m\alpha^n)=CS$$

wird der Nenner der besondern Wahrscheinlichkeit einer jeden Hypothese seyn §. 80. Die Integralrechnung führt

ohne Schwierigkeit zu der Grenze*) dieser Summe. (Siehe Note III.) Da der Gegenstand aber äußerst wichtig ist, so will ich für die Leser, denen diese Rechnung nicht bekannt ist; das Verfahren angeben, dessen Condorcet bei dieser Gelegenheit sich bedient hat. **)

Man multiplicire zuerst die Reihe S mit α, so wird das allgemeine Glied derselben durch $\alpha x^m (1-x)^n$ ausgedrückt, und die Summe aller Glieder, die diesem allgemeinen vorhergehen kann ausgedrückt werden durch

$$Ax^{m+1}(1-x)^n + Bx^{m+2}(1-x)^{n-1} + Cx^{m+3}(1-x)^{n-2} + \text{etc.}$$

wo A, B, C etc. die unbestimmten Coefficienten bezeichnen. Läßt man x um die Größe α wachsen, so wird diese Summe

$$A(x+\alpha)^{m+1}(1-x-\alpha)^n + B(x+\alpha)^{m+2}(1-x-\alpha)^{n-1} + C(x+\alpha)^{m+3}(1-x-\alpha)^{n-2} + \text{etc.}$$

und zieht man hiervon die vorhergehende Summe ab, so bleibt das übrig, um was sie zugenommen hat, und das genau dem Gliede $\alpha x^m (1-x)^n$ gleich ist. Man erhält daher die Gleichung

---

*) Unter Grenze muß man hier immer eine Größe sich denken, welche eine Größe in ihrem Wachsthume, oder in ihrer Abnahme nicht überschreiten, oder selbst nicht erreichen, der sie sich aber doch, so viel man will, nähern kann. Man sehe Lacroix Lehrbegriff der Differential- und Integralrechnung, deutsche Uebersetzung von Gruson Seite 9. U.

**) Elémens du Calcul des Probabilités p. 20. Dieses Verfahren bestätigt dies durch Integralrechnung erhaltene Resultat; übrigens ist es nützlich auf die gemeine Algebra die Auseinandersetzung einer Formel zurückzuführen, auf welche dieser ganze Theil der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht.

$$A\left\{(x+\alpha)^{m+1}(1-x-\alpha)^n - x^{m+1}(1-x)^n\right\}$$
$$+B\left\{(x+\alpha)^{m+2}(1-x-\alpha)^{n-1} - x^{m+2}(1-x)^{n-1}\right\}$$
$$+C\left\{(x+\alpha)^{m+3}(1-x-\alpha)^{n-2} - x^{m+3}(1-x)^{n-2}\right\}$$
$$+ \text{ꝛc.} = \alpha x^m (1-x)^n \ldots\ldots (\text{I.})^{*)}$$

Um diese Gleichung bequem zu entwickeln, setze man $1-x=z$, und man wird bemerken, daß die zweite Reihe (der einen Seite der Rechnung) aus der ersten entsteht, wenn man A in B, $m+1$ in $m+2$ und n in $n-1$ verwandelt, und eben so die übrigen Reihen. Läßt man sich daher nur auf die erste Reihe ein, so erhält man die Ausdrücke

$$A(x+\alpha)^{m+1}(z-\alpha)^n$$
$$= A\left\{x^{m+1} + (m+1)\alpha x^m + \text{ꝛc.}\right\}(z - n\alpha z^{n-1}$$
$$+ \text{ꝛc.}) =$$

---

*) Die Annahme der Reihe

$$Ax^{m+1}(1-x)^n + Bx^{m+2}(1-x)^{n-1} \text{ etc.}$$

für die Summe von $r-1$ Gliedern, wenn $\alpha x^m(1-x)^n$ als das rte Glied angesehen wird, stützt sich auf die Voraussetzung, daß das summatorische Glied eine Function des allgemeinen Gliedes sey. Ob die Form desselben richtig gewählt ist, muß sich durch die Ausmittlung der Werthe für die Coefficienten und durch die Vergleichung des Werthes für besondere Fälle, wo dieser Werth anders vorher bekannt ist, ergeben. — Da ferner in der Reihe, für welche obiger Ausdruck das summatorische Glied seyn soll, aus jedem Gliede das zunächst folgende erhalten wird, wenn x sich in $x+\alpha$ verwandelt, so wird durch diese Substitution das summatorische Glied für $r-1$ Glieder in das für r Glieder verwandelt. Setzt man also die Summe der r Glieder $= S$ und die der $r-1$ Glieder $= S'$, so ist $S-S'$ dem rten Gliede gleich, und hierauf beruht die Gleichung (I.)

$$= Ax^{m+1}z^n + (m+1)A\alpha x^m z^n - nA\alpha x^{m+1}z^{n-1} + A'\alpha^2 + A''\alpha^3 + \text{etc.}$$

wo die Glieder, in welchen höhere Potenzen von α als die erste vorkommen, blos angedeutet sind. Zieht man von dem letztern Resultate das Glied $Ax^{m+1}(1-x)^n = Ax^{m+1}z^n$ ab, so bleibt für die erste Reihe der Gleichung (I.)

$$(m+1)A\alpha x^m z^n - nA\alpha x^{m+1}z^{n-1} + A'\alpha^2 + \text{etc.}$$

Man sieht hieraus, daß sämmtliche Glieder dieser Gleichung durch α theilbar sind, und die ganze Gleichung wird daher

$$\begin{aligned} &A\left\{(m+1)x^m z^n - nx^{m+1}z^{n-1}\right\} + A'\alpha + \text{etc.}\\ &+B\left\{(m+2)x^{m+1}z^{n-1} - (n-1)x^{m+2}z^{n-2}\right\}\\ &\qquad + B'\alpha + \text{etc.}\\ &+C\left\{(m+3)x^{m+2}z^{n-2} - (n-2)x^{m+3}z^{n-3}\right\}\\ &\qquad + C'\alpha + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.} = x^m z^n. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besteht immer, so klein auch der Werth von α ist, und sie dehnt sich, wenn man $\alpha = 0$ setzt, auf den Fall aus, wo die Zahl $\frac{1}{\alpha} - 1$ der Glieder dieser Reihe unendlich wird; und da sie immer statt haben muß, was auch x bedeute, so muß man sie nach Verhältniß der Größen x und z ordnen, wodurch sie die Form erhält

$$\left\{A(m+1) - 1\right\}x^m z^n - \left\{nA - (m+2)B\right\}x^{m+1}z^{n-1}$$
$$- \left\{(n-1)B - (m+3)C\right\}x^{m+2}z^{n-2} - \text{etc.} = 0.$$

Setzt man nun den Coefficienten eines jeden Gliedes $= 0$,*) so erhält man

$$A(m+1) - 1 = 0 \text{ und daher } A = \frac{1}{m+1}$$

$$nA - (m+2)B = 0 \qquad B = \frac{n}{(m+1)(m+2)}$$

$$(n-1)B - (m+3)C = 0, \; C = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

rc. Die Reihe

$$\alpha \left\{ \alpha^m (1-\alpha)^n + (2\alpha)^m (1-2\alpha)^n \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + (x-\alpha)^m (1-x+\alpha)^n \right\}$$

hat hiernach zur Grenze

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{nx^{m+2}(1-x)^{n-1}}{(m+1)(m+2)}$$
$$+ \frac{n(n-1)x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1 . x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n+1)};$$

denn der Werth dieses Ausdruckes entsteht mit der Reihe, weil er so wie das allgemeine Glied $x^m(1-x)^n$, wenn man $x = 0$ setzt, verschwindet.**)

---

*) Nach der bekannten Regel, wenn

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta \ldots = 0$$

so ist auch

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ etc. U.

**) Diejenigen, die Integralrechnung verstehen, werden aus obiger Bemerkung den Zweck erkennen, daß aus derselben sich

Das letzte Glied der Reihe $(1-\alpha)^m \alpha^n$ entspricht dem Werthe $x = 1-\alpha$; je kleiner aber α ist, um so mehr nähert sich dieser Werth von x der 1; man kann daher die Einheit als den letzten Werth von x annehmen, und daher wird die Grenze der vollständigen Reihe

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n+1)}$$

(weil alle übrige Glieder den Factor $(1-x) = 0$ enthalten) und dieses ist die Grenze des Werthes von αS.

§. 83.

Bevor ich von dem Ausdrucke der oben betrachteten Grenze mehrere Anwendungen mache, bemerke ich, daß so lange x als unbestimmt angesehen wird, diese Grenze durch $S_x^{(m,n)}$ bezeichnet werden soll; in jedem andern Falle aber werde ich den Werth, der dem letzten Gliede entspricht, angeben. So soll der Ausdruck $S_1^{(m,n)}$ die Grenze für die Reihe bezeichnen, von dem Gliede an, wo $x = 0$ bis zu demjenigen, in welchem $x = 1$, hiervon ist der Werth, die am Ende des vorhergehenden §. angegebne Formel. $S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}$ bezeichnet die Grenze derselben Reihe aber nur bis zu dem Gliede, wo $x = \frac{1}{2}$, daraus folgt, daß

$$S_1^{(m,n)} - S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}$$

die Grenze für die Summe aller Glieder der Reihe αS giebt von denjenigen an, wo $x = \frac{1}{2}$ bis zu dem, wo $x = 1$.

---

ergiebt, es bedarf dem obigen Ausdrucke keine willkührliche Constante beigefügt werden. Die bekanntlich, wenn man $x = 0$ setzt, aus dem Werthe, welcher der Ausdruck hierdurch erhält, sich ergeben muß, und folglich im gegenwärtigen Falle selbst $= 0$ ist.

Die Werthe dieser Ausdrücke werden um vieles einfacher, wenn $n=0$; die allgemeine Reihe des vorhergehenden §. beschränkt sich auf ihr erstes Glied $\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}$; und weil $(1-x)^0=1$ so ist

$$S_x^{(m)} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ und } S_1^{(m)} = \frac{1}{m+1}$$

wenn man $x=1$ setzt.

§. 84.

Wenn man das vorhergehende gut verstanden hat, so ist es leicht, die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse zu erkennen. Nach dem §. 80. gesagten ist die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese oder irgend eines Verhältnisses $x=$

$$\frac{x^m(1-x)^n}{S} = \frac{\alpha x^m(1-x)^n}{\alpha S}$$

Multiplicirt man sie mit x (§. 81.), so kann man hiervon die Wahrscheinlichkeit ableiten ein Ereigniß A mehr zu erhalten, nämlich $\frac{\alpha x^{m+1}(1-x)^n}{\alpha S}$, woraus, was jeder Hypothese besonders zukömmt, erhalten wird, wenn man nach und nach α, 2α, 3α ꝛc. an die Stelle von x setzt; die Grenze der Summe dieser Resultate ist folglich $\frac{S_1^{(m+1,n)}}{S_1^{(m,n)}}$, und der Werth des Zählers kann aus dem von $S_1^{(m,n)}$ abgeleitet werden, wenn man m in $m+1$ verwandelt; substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.1}{(m+2)(m+3)\ldots.(m+n+2)}$$

$$\times \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots 1} = \frac{m+1}{m+n+2}$$

nachdem man die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren gehoben hat.

Sucht man die Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen eines neuen Ereignisses B, so erhält man, da die besondere Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in der x entsprechenden Hypothese $(1-x)$ ist, die Ausdrücke

$$\frac{\alpha x^m (1-x)^n}{\alpha S}(1-x) = \frac{\alpha x^m (1-x)^{n+1}}{\alpha S}.$$

$$\frac{S_1^{(m,n+1)}}{S_1^{(m,n)}} = \frac{n+1}{m+n+2}$$

Statt der Wahrscheinlichkeiten $\frac{m+1}{m+n+2}$ und $\frac{n+1}{m+n+2}$ erhält man nach dem gewöhnlichen Verfahren die Ausdrücke $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$, welche entstehen, wenn man die Anzahl, wie oft jedes Ereigniß erschienen ist, durch die Gesammtzahl der beobachteten Ereignisse theilt, und die mit den obigen nur in dem Falle zusammenstimmen, wenn $m = n$, in diesem Falle wird jeder der 4 Brüche $= \frac{1}{2}$, unter allen andern Umständen ist die erstere Schätzung von der letztern verschieden. Ist z. B. $m = 3$ und $n = 2$, so geben die einen $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{7}$, und die andern $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$; was übrigens bemerkt zu werden verdient, ist daß die strenge Schätzung der andern ohne Unterlaß sich nähert. Man sieht dies, wenn man die beiden Glieder der ersten Wahrscheinlichkeiten durch $m+n$ theilt, wodurch sie die Form erhalten

$$\frac{\frac{m}{m+n} + \frac{1}{m+n}}{1 + \frac{2}{m+n}} \text{ und } \frac{\frac{n}{m+n} + \frac{1}{m+n}}{1 + \frac{2}{m+n}}$$

die nur alsdann $\frac{m}{m+n}$ und $\frac{n}{m+n}$ werden können, wenn man die Zahl $m+n$ unendlich annimmt.

Die Differenz

$$\frac{m}{m+n} - \frac{m+1}{m+n+2} = \frac{m-n}{(m+n)(m+n+2)}$$

welche positiv ist, wenn $m > n$ zeigt, daß dasjenige von 2 Ereignissen, welches am häufigsten zugetroffen hat, eine immer zunehmende Wahrscheinlichkeit hat, wenn die Zahlen m und n in einem unveränderlichen Verhältnisse zu einander wachsen. Das Gegentheil findet statt, wenn $m < n$. Diese Verwandlungen sind merkwürdig, da sie durch die bloße Wiederholung des Geschehenen hervorgebracht werden; die Theorie der Wahrscheinlichkeiten a posteriori stimmt also gut mit der von Bernoulli über die aufeinander folgenden Versuche §. 28. zusammen. Denn es folgt aus der einen wie aus der andern, daß das Verhältniß der Zahl der Ereignisse A oder B zu der Gesammtzahl aller beobachteten Ereignisse ihre einfache Wahrscheinlichkeit zur Grenze hat.

§. 85.

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei p neuen Wiederholungen desselben Zufalls $p-q$ Ereignisse A und q Ereignisse B vorkommen werden, läßt sich mittelst der oben auseinandergesetzten Grundsätze ohne Schwierigkeit finden. In der x entsprechenden Hypothese wird die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses durch $x^{p-q}(1-x)^q$ ausgedrückt, wenn die Ordnung wie die einfachen Ereignisse aufeinander folgen sollen, bestimmt ist, und im entgegengesetzten Falle durch

$$\frac{p(p-1)\ldots.(p-q+1)}{1.2\ldots.q} x^{p-q}(1-x)^q = C' x^{p-q}(1-x)^q$$

Wird diese Wahrscheinlichkeit mit $\frac{\alpha x^m (1-x)^n}{\alpha S}$ als der Wahrscheinlichkeit der Hypothese selbst, multiplicirt, so erhält man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\alpha x^{m+p-q} (1-x)^{n+q}}{\alpha S} \text{ oder } \frac{C' \alpha x^{m+p-q} (1-x)^{n+q}}{\alpha S}$$

nimmt man die Grenze dieser Summe von $x = 0$ bis $x = 1$, und läßt den von x unabhängigen Coefficienten C' unbeachtet, so wird sie

$$\frac{S_1^{(m+p-q,\, n+q)}}{S_1^{(m,n)}} =$$

$$\frac{(n+q)(n+q-1) \ldots\ldots 1}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots(m+n+p+1)} \times \frac{(m+1)(m+2) \ldots\ldots (m+n+1)}{n(n-1) \ldots\ldots 1},$$

ein Ausdruck, der sich noch vereinfachen läßt, wenn man die Factoren von 1 bis n, die zugleich multipliciren und dividiren, hebt, hierdurch erhält man

$$\frac{(n+q)(n+q-1) \ldots\ldots (n+1)}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots\ldots(m+n+p+1)} \times (m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)$$

Wenn $n > p - q$, so kann man auf gleiche Art noch die Factoren von $m + p - q + 1$ bis $m + n + 1$ einschlüßlich heben, und obige Formel wird

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-q)(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}{(m+n+2)(m+n+3)\ldots\ldots(m+n+p+1)}$$

Setzt man z. B. $p = 3$, $q = 1$, so giebt dieser Ausdruck die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $AAB =$

$$\frac{(m+1)(m+2)(n+1)}{(m+n+2)(m+n+3)(m+n+4)}$$

und theilt man jeden Factor des Zählers und Nenners dieses Bruches durch $m+n$, so sieht man leicht, daß er immerwährend $\frac{m^2n}{(m+n)^3}$ sich nähert, also der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, die aus den einfachen Wahrscheinlichkeiten $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$ §. 21. sich ergiebt. Dieselben Umstände finden bei dem allgemeinen Ausdrucke statt, und bewähren sich, wenn man diesen Ausdruck mit Hülfe der Formeln entwickelt, die dazu dienen, durch Annäherung die Producte einer großen Anzahl Factoren zu berechnen; man findet, daß wenn die Zahlen m und n sehr groß in Verhältniß zu den Zahlen p und q sind, $\frac{m^{p-q}n^q}{(m+n)^p}$ die Grenze des allgemeinen Ausdrucks ist. (Siehe Note I.)

Also, je größer die Anzahl der beobachteten Ereignisse ist, desto weniger weichen die einfachen, sowohl als die zusammengesetzten aus obigen Formeln abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten, von den a priori bestimmten Wahrscheinlichkeiten ab, oder mit desto mehr Genauigkeit stellen die durch die Ordnung der Ereignisse gegebnen Verhältnisse die einfachen Wahrscheinlichkeiten dar. Die Möglichkeit, die einen für die andern zn nehmen, bot sich denen, die zuerst über diesen Gegenstand nachdachten, so natürlich dar, daß sie dieselbe als an und für sich gewiß ansahen; aber man konnte ohne Beihülfe der Rechnung, welche zeigt, daß anstatt der vermutheten Gleichheit eine immerwährende und mehr und mehr zunehmende Annäherung statt findet, sich hierüber keine Rechenschaft geben.

§. 86.

Mittelst der so eben von uns abgeleiteten Formel, vereinigt man in einem einzigen Ausdrucke alle Wahrscheinlichkeiten der zusammengesetzten Ereignisse, welche durch p neue Wiederholungen desselben Zufalls statt finden können; es ist hierzu hinlänglich nach und nach $q = 0$, $= 1$, $= 2$, $= 3$ ꝛc. zu setzen. Behält man die durch C′ bezeichneten Coefficienten bei, um die Ordnung der einfachen Ereignisse unbestimmt zu lassen, so bildet sich die Reihe

$$\frac{S_1^{(m+p,n)}}{S_1^{(m,n)}} + \frac{p}{1}\frac{S_1^{(m+p-1,n+1)}}{S_1^{(m,n)}}$$

$$+ \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}\frac{S_1^{(m+p-2,n+2)}}{S_1^{(m,n)}} \ldots + \frac{S_1^{(m,n+p)}}{S_1^{(m,n)}},$$

die hier die Stelle der Reihe des Binoms $(e+f)^p$ bei Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für die wiederholten Versuche, a priori, einnimmt §. 22. Die Summe der Glieder von dem ersten bis zu dem allgemeinen Gliede

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}\frac{S_1^{(m+p-q,n+q)}}{S_1^{(m,n)}}$$

einschlüßlich, giebt die Wahrscheinlichkeit, daß nicht weniger als $p-q$ Ereignisse A und nicht mehr als q Ereignisse B vorkommen werden.

Wenn $n = 0$ und $q = 0$, so verwandelt sich $S_1^{(m,n)}$ in $S_1^m = \frac{1}{m+1}$ §. 83., und obige Formel reducirt sich auf das einzige Glied

$$\frac{S_1^{(m+p)}}{S_1^{(m)}} = \frac{m+1}{m+p+1}$$

welches die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß p mal nach einander A vorkommen wird, wenn man es zuvor m mal ununterbrochen nach einander beobachtet hat.

Theilt man die Zahl p in Theile, die den Zahlen m und n proportionirt sind, nämlich in $\frac{mp}{m+n}$ und $\frac{np}{m+n}$, so giebt die Summe der Glieder aus obiger Reihe, von dem an, in welchen

$$S_1^{\left(m+\frac{mp}{m+n}+z,\ n+\frac{np}{m+n}-z\right)}$$

vorkömmt, bis zu demjenigen, welches

$$S^{\left(m+\frac{mp}{m+n}-z,\ n+\frac{np}{m+n}+z\right)}$$

enthält, die Wahrscheinlichkeit, daß bei p neuen Wiederholungen desselben Zufalls, die Zahl der Ereignisse A, um nicht mehr oder weniger als z sich von der Zahl entfernen werde, die m proportionirt ist.

§. 87.

Bevor ich zu den Anwendungen übergehe, muß ich noch zeigen, wie ich zu Anfang dieses Abschnitts bemerkte, daß die *a posteriori* bestimmten Wahrscheinlichkeiten eine Art mittlere Wahrscheinlichkeiten sind; dieses folgt wirklich aus der Art, wie sie erhalten werden, und wirft ein neues Licht auf ihr Wesen. Da der Ausdruck $Cx^m(1-x)^n$ §. 82. die Wahrscheinlichkeit angiebt m mal das Ereigniß A und n mal B zu erhalten, wenn ihre einfachen Wahrscheinlichkeiten x und $1-x$ sind, so giebt die Summe ihrer in allen möglichen Hypothesen berechneten Werthe durch ihre Summe getheilt, den mittlern Werth (nach der Alligationsregel). Die Summe mehrerer Größen getheilt aber giebt dasselbe, als wenn man

jede für sich theilt und die Quotienten addirt; und wenn man die Einheit in Theile zerlegt, von welchen jeder $= \alpha$, so ist die Anzahl dieser Theile $\frac{1}{\alpha}$; nun ist

$$\frac{x^m (1-x)^n}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha x^m (1-)^n$$

der Ausdruck $CS_1^{(m,n)}$ kann daher als der eines mittlern Werthes angesehen werden, den man aus den verschiednen Wahrscheinlichkeiten bildet, die das statt gehabte zusammengesetzte Ereigniß in allen möglichen Hypothesen hat.

Alle unten folgende Ausdrücke lassen sich auf gleiche Art nach dieser Ansicht ableiten. Ist die Rede von der Wahrscheinlichkeit ein neues Ereigniß A zu erhalten, so erhält man, da die Wahrscheinlichkeit des aus diesem und den vorhergehenden zusammengesetzten Ereignisses, in der x entsprechenden Hypothese $Cx^m(1-x)^n x = Cx^{m+1}(1-x)^n$ ist, als mittlern von allen Hypothesen abgeleiteten Werth, die Grenze der Reihe, deren allgemeines Glied ist

$$C \frac{x^{m+1} (1-x)^n}{\frac{1}{\alpha}} = C \alpha x^{m+1} (1-x)^n$$

nämlich $CS_1^{(m+1,n)}$.

Diese letztere Wahrscheinlichkeit soll sich nach den Grundsätzen der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit §. 17. auch bilden, wenn man die des statt gehabten zusammengesetzten Ereignisses mit der ein Ereigniß *A* mehr zu erhalten multiplicirt, die gegenwärtige ist daher dem Quotienten der erstern durch die letztern getheilt gleich, wodurch erhalten wird

$$\frac{CS_1^{(m+1,n)}}{CS_1^{(m,n)}} = \frac{S_1^{(m+1,n)}}{S_1^{(m,n)}}$$

wie man §. 84. gefunden hat.

Dieselben Betrachtungen geben für das Geschehen eines neuen Ereignisses B die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{S_1^{(m,n+1)}}{S_1^{(m,n)}}.$$

Die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten beträgt 1, wie es seyn muß; denn um die Summe von zwei Reihen Glieder zu erhalten, kann man damit anfangen, die Glieder zu addiren, wie sie in beiden übereinstimmen, und hierauf die Summe der Glieder, der durch diese Additionen gebildeten neuen Reihe nehmen.

Man hat hiernach

$$\alpha x^{m+1}(1-x)^n + \alpha x^m(1-x)^{n+1} =$$
$$\alpha x^m(1-x)^n \left\{x + (1-x)\right\} = \alpha x^m(1-x)^n$$

und nehmen wir nun die Grenzen der addirten Reihen und die ihrer Summen, so ergiebt sich

$$S_x^{(m+1,n)} + S_x^{(m,n+1)} = S_x^{(m,n)};$$

und daher

$$\frac{S_1^{(m+1,n)} + S_1^{(m,n+1)}}{S_1^{(m,n)}} = \frac{S_1^{(m,n)}}{S_1^{(m,n)}} = 1.$$

§. 88.

Man kann diese Betrachtungen leicht auf die allgemeinen Formeln §. 85. und 86. ausdehnen. Die Summen der Glieder, aus welchen die letztere dieser Formeln besteht, die alle bei p neuen Wiederholungen desselben Zu-

falls möglichen Ereignisse in sich faßt, muß der Einheit gleich seyn, wie die Summe der Glieder von $(e+f)^p$. Es ist auch nicht schwer einzusehen, daß diese ganze Theorie darauf hinaus kömmt, daß die mittlere Wahrscheinlichkeit des statt gehabten zusammengesetzten Ereignisses als Einheit angenommen wird, mit welcher man die Wahrscheinlichkeiten vergleicht, die aus den Verbindungen dieses mit den zukünftigen Ereignissen sich ergeben. Man kann daher diese Wahrscheinlichkeiten auch als relativ in Beziehung zu der erstern ansehen. Hieraus folgt, daß sie nicht immer für dieselben Verbindungen zukünftiger Ereignisse dieselben sind, was bei a priori bestimmten Wahrscheinlichkeiten §. 22. nicht vorkömmt.

Die Formel §. 85. ändert ihren Werth mit m und n, wenn gleich p und q dieselben bleiben, und da neue beobachtete Ereignisse diesen Werth ändern, so folgt mit Gewißheit, daß die Folgerungen, die man aus ihnen ableitet, nicht weit ausgedehnt werden dürfen. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei dem Aufeinanderfolgen der künftigen Ereignisse, *A* und B sich nach einem annähernden Verhältnisse zu denen wiederholen werden, die schon vorher beobachtet worden sind §. 86., vermehrt sich nicht ohne Unterlaß, wie durch die a priori bestimmte Wahrscheinlichkeiten §. 28. Um aus diesen Formeln nützliche Resultate zu ziehen, muß immer die Zahl p der künftigen Ereignisse sehr klein seyn, in Beziehung zu der Zahl $m+n$ der vergangenen, auch muß diese letztere an und für sich sehr bedeutend seyn, so daß einige neue Beobachtungen nicht hinreichen, um die aus den erstern abgeleitete Resultate merklich zu ändern. Mit diesen Einschränkungen und bei Untersuchungen, deren Natur keine strenge Genauigkeit erfordert und selbst nicht zuläßt, kann man fast immer statt der Formeln dieses Abschnitts, die des vorhergehenden substituiren, was sehr glücklich ist, denn die Rechnungen, die schon durch diese weitläufig sind, würden durch jene ohne Beihülfe der §. 25. angeführten Näherungsformeln öfters

gar nicht ausführbar seyn; auch will ich nur einige der durch Laplace über diesen Gegenstand aufgelößten Fragen anzeigen.

§. 89.

Erstens hat er den Näherungsausdruck für die Wahrscheinlichkeit der Resultate gegeben, die aus den Tabellen der Sterblichkeit abgeleitet sind, wenn man die Zahl der Beobachtungen kennt, durch welche sie angefertigt worden sind. Diese Tafeln, deren Einrichtung ich weiter unten auseinander setzen werde, geben zu erkennen, wieviel man einer Anzahl zugleich geborner Individuen bei einem gewissen Alter noch leben werden. Es sey $m+n$ die erstere dieser Zahlen und m die zweite; so muß man, wenn man die Folgerungen dieser Beobachtungen auf p Kinder ausdehnen will, diese Zahl in Theile zerlegen, die den Zahlen m und n proportionirt sind, dieses giebt $\frac{pm}{m+n}$ für die noch lebenden und $\frac{pn}{m+n}$ für die gestorbenen. Soll nun das Zutrauen geschätzt werden, das diese Resultate verdienen, so muß man die Wahrscheinlichkeiten ausmitteln, daß der Fehler, dem sie unterworfen seyn können, in sehr enge Grenzen eingeschlossen seyn werde, was erhalten wird, wenn man die Summe der Glieder von dem Ausdrucke §. 86. berechnet, von demjenigen an, welches

$$S_1^{\left(m+\frac{mp}{m+n}+z,\ n+\frac{np}{m+n}-z\right)}$$

enthält, bis zu demjenigen, in welchem

$$S_1^{\left(m+\frac{mp}{m+n}-z,\ n+\frac{np}{m+n}+z\right)}$$

vorkömmt.

Obgleich Laplace den Annäherungswerth für diese Summe äußerst einfach bestimmt hat, so giebt er doch keine numerische Rechnung; und wirklich sieht man schon jetzt ein, und wird in der Folge vollkommen überzeugt werden, daß eine ähnliche Prüfung fast unausführbar ist, wenn sie nicht für jedes Alter und mittelst sehr vervielfältigten Tabellen wiederholt wird, und daß es vorzüglich die scharfsinnigen Kunstgriffe in der dazu erforderlichen Rechnungen sind, die ihr Werth geben, wie bei dem größten Theile der Untersuchungen dieser Art.

§. 90.

Die zweite Frage, von welcher ich hier die Auseinandersetzung und Resultate mittheilen will, hat eine wirkliche Anwendung. Sobald man die geringe Veränderung wahrgenommen hatte, die die Zahl der Geburten und Todesfälle bei einer Bevölkerung darbietet, deren Gang nicht durch natürliche oder politische Plagen gestört worden ist, suchte man die Verhältnisse dieser Zahlen zu denen der ganzen Bevölkerung zu bestimmen, indem man die Listen der Geburten und Todesfälle in verschiednen Theilen desselben Landes und für verschiedne Jahre zu einer Zeit anfertigte, wo man eine genaue Volkszählung in diesen Theilen benutzen konnte. Das so erhaltene mittlere Verhältniß schien geeignet, die Bevölkerung des ganzen Landes auf eine schnellere und sicherere Art kennen zu lernen, als eine ganze Volkszählung, die immer viel Zeit erfordert und öfters vielen Schwierigkeiten in der Ausführung unterworfen ist. Diese von Moheau zuerst ans Licht gebrachte Idee, wurde 6 Jahre lang unverdrossen von Duséjour, Condorcet und Laplace weiter verfolgt.*) Sie hatten sich vorgenommen,

*) Siehe die Recherches sur la population de la France par Moheau und die Mémoires de l'Academie des Sciences, Jahrgänge von 1774—1789.

ihre Rechnungen nach und nach auf jedes der 182 Blätter der Cassinischen Charte von Frankreich anzuwenden; diese Arbeit erstreckte sich schon auf 149 Blätter, als sie unterbrochen wurde. Die Revolution hatte die Grundbestimmungen geändert, und deswegen fieng Laplace 1799 sie vom neuen an. Die Regierung verordnete hiernach in 30 gewählten Departemens sorgfältig genaue Listen der Geburten, Heurathen und Sterbefälle vom Jahre 8 bis 11 (vom 22. Sept. 1799 bis dahin 1802) anzufertigen. Es ergaben sich hieraus

Geburten	Heurathen	Todesfälle
110312 Knaben	46037	103659 Mannspersonen
105287 Mädchen		99443 Frauenspersonen,

und für den Bestand der Bevölkerung derselben Departemens in der zweiten Epoche 2037615 Individuen. Nach diesen Zahlen stehen die Geburten der Knaben zu denen der Mädchen in dem Verhältnisse von 22 zu 21; die Heurathen zu den Geburten in dem von 3 zu 14; endlich die der Bevölkerung zu den jährlichen Geburten, wie 28,353 ungefähr zu 1, was für alle damals der französischen Regierung unterworfene Länder, wo zusammen die jährlichen Geburten ungefähr auf 1500000 sich beliefen, die Zahl der gesammten Bevölkerung 42500000 giebt.*) Laplace, der hierauf sich Rechenschaft von der Genauigkeit geben wollte, die er von seiner Sorgfalt erwarten könnte, suchte die Wahrscheinlichkeit, daß diese Schätzung keinen größern Fehler als von 500000 unterworfen sey. Folgendes ist die Ableitung für die Auseinandersetzung dieser Aufgabe mittelst der analytischen Formeln:

Bezeichnet man durch $m + n$ die Zahl der in der ersten Zählung enthaltenen Individuen, durch n die der jährlichen Geburten, die $\frac{1}{3}$ der oben für 3 Jahre angeführten

---

*) Théorie analytique des Probabilités p. 391.

Summe der Geburten für beide Geschlechter beträgt; durch q die Zahl der Geburten in ganz Frankreich, so wird $p = \frac{(m+n)q}{n}$ die Bevölkerung dieses ganzen Landes mit Inbegriff der Zahl q der Geburten betragen; und folglich wird

$$\frac{C'S_1^{(m+\frac{(m+n)}{n}q-q,\ n+q)}}{S_1^{(m,n)}}$$

die Wahrscheinlichkeit seyn, daß diese Bevölkerung aus den beiden Theilen $\frac{(m+n)q}{n} - q$ und q zusammengesetzt sey.

Bildet man daher eine Reihe von Glieder, die dem obigen ähnlich sind, und giebt dem ersten Exponenten alle Werthe zwischen $m + \frac{(m+n)}{n}q - q + z$ und $m + \frac{(m+n)}{n}q - q - z$, und läßt die zweiten Exponenten immer $n+q$ bleiben; so giebt die Summe dieser Glieder die Wahrscheinlichkeit, daß die aus den Geburten gefolgerte Zahl der ganzen Bevölkerung sich nicht über die Zahl z als ein mehr oder weniger von der Wahrheit entferne. Für $z = 500000$ geben die Näherungsformeln von Laplace $\frac{1161}{1162}$ als den Werth dieser Wahrscheinlichkeit, und nimmt man $z = 700000$, so wird das Gegentheil von derselben Wahrscheinlichkeit unmerklich.

§. 91.

Bei allem vorhergehenden hat man angenommen, daß für dieselbe Hypothese die einfache Wahrscheinlichkeit beständig sey; nämlich daß man jedesmal die gezogne Kugel wie-

der in die Urne lege. Diese Voraussetzung schien bei dem größten Theile der natürlichen Ereignisse anwendbar, denn man sieht ihre Ursachen als immer auf gleiche Art wirkend an, oder das Verhältniß der Zahlen der gleichmöglichen Fälle als beständig. Condorcet indessen beschränkte sich nicht auf diese Betrachtungen, er hat eine Aufzählung aller Hypothesen gemacht, die der Gegenstand zuläßt, und hat sie einer gründlichen Untersuchung unterworfen. *) Er unterscheidet drei: „1) die, wo die Wahrscheinlichkeit beständig ist, wo man jedes (einfache) Ereigniß als gleich möglich annimmt, oder wenigstens die mittlere Wahrscheinlichkeit für jedes als auf gleiche Art bestimmt (das ist die, womit wir uns beschäftigt haben). 2) die, wo man diese Wahrscheinlichkeit veränderlich annimmt, aber unabhängig von der Zeit, in welcher die Ereignisse geschehen sind, und von der Ordnung, in welcher man sie beobachtet hat. 3) die, wo man sie abhängig annimmt, oder vielmehr als könnten sie von dieser Ordnung abhängen."

Die dritte Hypothese, als die allgemeinste, sollte meistens gebraucht werden; denn es ist ein Grundgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, alles in Betracht zu ziehen, was nicht als unmöglich erkannt wird. Aber könnte es nicht kommen, daß die Kräfte, die gewisse Ereignisse hervorbringen, sich ändern, und folglich ihre Wahrscheinlichkeit größer oder geringer wird? Daß wenn sie aus einer Entwickelung nach und nach hervorgehen, die Ordnung ihrer Erzeugung, die Epoche, in welcher sie erscheinen, Einfluß auf ihre Möglichkeit habe? So lange diese Meinungen noch nicht durch positive beständige Gesetze völlig beseitigt sind, können die aus der erstern Hypothese abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten nur auf eine begränzte Zeit ausgedehnt werden, und müssen öfters nach neuen Beobachtungen wieder berechnet werden. Man sieht leicht ein, daß die Formeln, in Beziehung zu der letztern Hypothese, außerhalb

*) Memoires de l'Academie des Sciences 1783. p. 539.

der Gränzen einer Abhandlung liegen, die es blos mit den Anfangsgründen zu thun hat. Ich verweise über diesen Gegenstand den Leser auf die angeführten Memoires und auf den 3ten Theil der Essai sur la probabilité des décisions etc.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen (oder der Hypothesen) durch Beobachtungen.

§. 92.

Sieht man bei der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse alle zwischen 0 und 1 enthaltenen Verhältnisse als möglich an, so wird die Wahrscheinlichkeit der x entsprechenden Hypothese ausgedrückt durch

$$\frac{\alpha x^m (1-x)^n}{\alpha S} \quad (\S\ 84.)$$

Dieser Bruch, dessen Nenner die endliche Größe $S_1^{(m,n)}$ §. 82. zur Grenze hat, ist um so kleiner, je kleiner α ist, und je größer folglich die Zahl der gebildeten Hypothesen ist. Nimmt man daher diese letztere Zahl unendlich an, so wird α unendlich klein, und jede Hypothese hat nur eine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit. Uebrigens ist es auch nicht die absolute Wahrscheinlichkeit einer dieser Hypothesen, die man auszumitteln sich vornimmt, sondern die relativen Wahrscheinlichkeiten, was sehr leicht ist, denn bezeichnet man eine andere Hypothese durch x', so erhält man, nach dem §. 13. gesagten, als Wahrscheinlichkeit der erstern Hypothese in Beziehung zur zweiten

$$\frac{\alpha x^m (1-x)^n}{\alpha x^m (1-x)^n + \alpha x'^m (1-x')^n} = \frac{x^m (1-x)^n}{x^m (1-x)^n + x'^m (1-x')^n}$$

ein Ausdruck, in welchem α verschwindet.

Der Werth dieses Ausdrucks hängt von dem der Verhältnisse x und x′ ab, und bringt man ihn auf die Form

$$\frac{1}{1+\frac{x'^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}}$$

so sieht man leicht, daß er um so mehr der Einheit sich nähert, je mehr $x^m(1-x)^n$ den Werth von $x'^m(1-x')^n$ an Größe übersteigt. Er erreicht den möglichst größten Werth, wenn man unter allen Gliedern der Reihe

$$\alpha^m(1-\alpha)^n,\ (2\alpha)^m(1-2\alpha)^n,\ \text{rc.}$$

das kleinste für $x'^m(1-x')^n$ und das größte für $x^m(1-x)^n$ nimmt. Ersteres kann nie Null werden, so lange nicht eine der Zahlen m, n Null ist. Was das größte Glied anbelangt, so findet man durch Differentialrechnung, daß es dem Werthe $x=\frac{m}{m+n}$ entspricht, nämlich daß durch den Werth, aus welchem $1-x=\frac{n}{m+n}$ folgt, das Produkt $x^m(1-x)^n$ größer wird, als durch jeden andern Werth, den man x beilegen kann. Dieses Resultat ist sehr merkwürdig, denn es lehrt uns; daß unter allen Hypothesen, die die wahrscheinlichste ist, in welcher die einfachen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B dem Verhältnisse, wie oft jedes dieser Ereignisse geschehen ist, zu ihrer Gesammtzahl gleich sind. Dieses trifft überdies mit dem Satze §. 27. zusammen, obgleich es auf weit allgemeinere Betrachtungen gestützt ist.*)

*) Den Werth von x, bei welchem eine Function dieser Größe ein Maximum oder Minimum wird, findet man bekanntlich, wenn man die Function selbst differenzirt, und das Differentiale

§. 93.

Dieselbe Hypothese kann, außer daß ihr die größte relative Wahrscheinlichkeit zukömmt, auch noch als sich ohne Unterlaß, nach Maßgabe, wie die Zahl der Beobachtungen bedeutender wird, der wahren Wahrscheinlichkeit nähernd angesehen werden, nämlich wenn man diese Zahl nach Umständen vermehrt, kann man eine der Einheit, so nahe man nur immer will, kommende Wahrscheinlichkeit erhalten, daß der wahre Werth von x innerhalb der Grenzen

$$\frac{m}{m+n} + c \text{ und } \frac{m}{m+n} - c$$

eingeschlossen seyn wird, die Größe c mag noch so klein seyn. Der Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit besteht aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten, die den verschiednen Werthen entsprechen, die man x innerhalb der oben angezeigten Grenzen beilegen kann. Er ist daher

$$\frac{S_b^{(m,n)} - S_a^{(m,n)}}{S_1^{(m,n)}} \quad (§. 83.)$$

wenn man der Kürze wegen

$$\frac{m}{m+n} - c = a, \quad \frac{m}{m+n} + c = b$$

$= 0$ setzt. Daher ist im gegenwärtigen Falle

$$d(x^m (1-x)^n) = 0 \text{ also}$$

$$mx^{m-1} dx (1-x)^n - nx^m (1-x)^{n-1} dx = 0$$

folglich $m(1-x) - nx = 0$

woraus folgt $m = mx + nx$

und endlich $\frac{m}{m+n} = x$

setzt; da man hierbei aber annimmt, daß m und n bedeutende Zahlen sind, so muß man, um hiervon den Werth zu finden, sich der Näherungsformeln und der Integralrechnung bedienen (siehe Note III.) und deßwegen kann die Auseinandersetzung des zu Anfang dieses §. aufgestellten Satzes hier nicht statt finden. Ich will blos bemerken, daß dieser Satz dem von §. 28. analog ist, und den Fundamentallehrsatz den Jacob Bernoulli nur für die Bestimmungen der Wahrscheinlichkeiten a priori bewiesen hat, auf die ganz allgemeinen Betrachtungen stützt, welche dazu dienen, die Wahrscheinlichkeiten a posteriori zu bestimmen.

§. 94.

Aus dem vorhergehenden ergiebt sich auch, daß wenn die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese insbesondere nicht angebbar ist, die Wahrscheinlichkeit von dem Inbegriffe mehrerer, innerhalb Grenzen, deren Differenz endlich ist, eingeschlossenen Hypothesen einen endlichen Werth hat, denn dieses ist bei dem Ausdrucke

$$\frac{S_b^{(m,n)} - S_a^{(m,n)}}{S_1^{(m,n)}}$$

in allen Fällen, wenn b — a eine endliche Größe ist, der Fall. Diese Bemerkung ist äußerst wichtig. Wenn man z. B. ein stetes Uebergewicht in der Anzahl der Fälle, in welchen ein Ereigniß geschieht über die Anzahl der Fälle, wo das entgegengesetzte Ereigniß statt hat, beobachtet, so ist man zu glauben geneigt, daß das Hervorbringen des erstern leichter sey, als das des andern, oder daß eine Ursache statt finde, die eher das eine als das andere bestimme, oder endlich, was noch immer dasselbe ist, daß die einfache Wahrscheinlichkeit des erstern Ereignisses $\frac{1}{2}$ übersteige. Aber dieser Glaube, der anfänglich nur eine einfache Wahrnehmung ist, verstärkt sich nach Maßgabe, wie

die Ereignisse fortfahren, sich in derselben Ordnung zu erzeigen, und ist einer Schätzung fähig, wenn man nach der Zahl der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit bestimmt, daß der Werth von x innerhalb der Grenzen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 eingeschlossen sey, was mittelst des Ausdrucks geschehen kann

$$\frac{S_{1}^{(m,n)} - S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}}{S_{1}^{(m,n)}} = 1 - \frac{S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}}{S_{1}^{(m,n)}}.$$

§. 95.

Diese Formeln haben in Beziehung zu den Geburten eine ganz eigne Anwendung. Arbuthnot, der bei den Listen der Geburten in London vom Jahre 1629 bis 1710 bemerkte, daß die Zahl der Geburten der Knaben sich wenig von der Zahl der der Mädchen entfernte, und wahrscheinlich glaubte, es könne kein ursprüngliches Naturgesetz statt haben, welches diese Zahlen in so wenig von der Gleichheit verschiednen Grenzen erhielt, wollte in dieser vermeinten Gleichheit ein immerwährendes Wunder sehen. Nicolaus Bernoulli im Gegentheil, dem die hinlänglich bemerkliche Differenz, die bei diesen Zahlen statt hatte, auffiel, so wie daß immer mehr Knaben als Mädchen geboren wurden, sah hierin mit Recht die Anzeige einer größern Möglichkeit für die Geburt der Knaben, als für die der Mädchen; das Verhältniß der Zahl der einen zu der Zahl der andern war $\frac{18}{17}$.*) Um es zu beweisen, zeigt er, daß wenn man einen 35seitigen Würfel, der 18 schwarze und 17 weiße Seiten hat, 14000 mal wirft, eine Wahrscheinlichkeit, die größer als $\frac{43}{44}$ ist, statt findet, daß die Zahl, wie oft schwarz getroffen worden, sich nicht über 163, sey es über oder unter der Zahl 7200, von dieser letztern Zahl die $\frac{18}{35}$ der Würfe

*) Analyse des Jeux de hasard, par Montmort pag. 388.

beträgt, entfernen werde; es war daher nicht auffallend, daß unter 14000 Geburten die Zahl der von jedem Geschlechte, um nicht mehr von dem durch ihre einfache Wahrscheinlichkeit angezeigten Verhältnisse abwichen, nämlich von 7200 Knaben und 6800 Mädchen. Diese Begebenheit hat sich von neuem in den meisten Staaten von Europa bestätigt. Daniel Bernoulli hat sich damit beschäftigt,*) und endlich hat Laplace sie durch directe Formeln, nämlich durch die des vorhergehenden §. behandelt.**)

---

*) Novi Comment. Acad. Petrop. t. XIV, pars 1a et t. XV.

**) Nach einem 82 jährigen Durchschnitt (von 1629 bis 1710) wurden in London jährlich 11429 Kinder geboren. Die meisten Knaben wurden im Jahre 1661 und die wenigsten 1703 geboren. Auf obige Mittelzahl reducirt, betrug im erstern Jahre die Zahl der Knaben 6128, und die der Mädchen 5301, und in dem letztern Jahre die der Knaben 5745 und die der Mädchen 5684. Nimmt man nun an, daß es gleich möglich sey, daß ein Knabe oder ein Mädchen geboren werde, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 11429 Geburten nicht unter 5745 und nicht über 6218 Knaben seyn werden, ungefähr $^5/_{17}$; und die Wahrscheinlichkeit, daß dieses 82 Jahre hinter einander geschehen wird, ist einem Bruche gleich, der 1 zum Zähler und eine Zahl von 44 Stellen zum Nenner hat. Hieraus folgert s'Gravesande, daß wenn die Geburten vom Ohngefähr abhiengen, die Londner Begebenheiten unmöglich hätten geschehen können. Da dieses aber doch wirklich der Fall war, so ist offenbar, daß es eine göttliche Weisheit bewirken muß, damit die Ordnung, welche zur Erhaltung des menschlichen Geschlechts erfordert wird, beibehalten werde, daß ein unendliches Wesen die unendliche Wahrscheinlichkeit des Gegentheils überwindet ꝛc. So beweißt er Gottes Sorgfalt die Begebenheiten dieser Welt zu regieren. (Man sehe hierüber Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst von Carl Chassot de Florencourt Altenburg 1781. S. 53—54.)

Von 1745 bis 1784 geben die Listen der Geburten in Paris 393386 Knaben, 377555 Mädchen, Zahlen, deren Verhältniß ungefähr $\frac{25}{24}$ beträgt, also geringer als $\frac{19}{18}$, die man durch die Listen von London vom Jahre 1664 bis 1758 einschlüßlich findet, und als $\frac{22}{21}$ das durch die Listen des Königreichs Neapel (mit Ausschluß von Sicilien) von 1774 bis 1781 einschlüßlich erhalten wird. Uebrigens haben die Näherungsformeln Laplace durch die ersten beiden Zahlen für die Wahrscheinlichkeit, daß x größer als $\frac{1}{2}$ sey, die Einheit weniger einen Bruch gegeben, in welchem die Einheit durch eine Zahl von 72 Stellen getheilt ist.*) Ein kleiner Ueberschuß in der Zahl der Wiederholungen eines Ereignisses, über die der Wiederholungen des entgegengesetzten Ereignisses, war also durch seine Beständigkeit hinreichend, um mit einer unermeßlichen Schnelligkeit die Wahrscheinlichkeit zu vergrößern, welche eine größere Leichtigkeit für das erstere als für das letztere anzeigt; und je mehr die Beobachtungen sich häufen und dasselbe Verhältniß der Größe beibehalten, desto mehr wächst auch diese Wahrscheinlichkeit.

§. 96.

Die Formel §. 93. wird um vieles einfacher, wenn nur Ereignisse einer einzigen Art vorgekommen sind. In diesem Falle verwandelt sich $S^{(m,n)}_{\frac{1}{2}}$ in

$$S^{(m)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(m+1)2^{m+1}} \text{ und } S^{(m,n)}_{1} = \frac{1}{m+1} \ (\S.83.)$$

man erhält daher

$$1 - \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}}$$

*) Théorie analytique des Probabilités p. 379.

als Wahrscheinlichkeit, daß die des immerwährend beobachteten Ereignisses größer als $\frac{1}{2}$ sey. Man kann dieses zuvörderst auf eins der merkwürdigsten Phänomenen im Weltsysteme anwenden, nämlich auf das gleichförmige, womit die Hauptplaneten und ihre Monde ihre Umläufe um die Sonne halten. Sieht man die Bewegung eines jeden dieser Körper als Erneuerung derselben Begebenheit an, so zeigt die Wiederholung dieser Begebenheit eine Ursache an, die die Richtung von Westen nach Osten vorzugsweise vor der entgegengesetzten Richtung bestimmt. Wendet man die Rechnung nur bei den Hauptplaneten an, um nur Umstände, die streng genommen einander gleich sind, in Betracht zu ziehen, so muß man $m = 11$ setzen, woraus folgt

$$\frac{2^{12} - 1}{2^{12}} = \frac{4095}{4096}$$

als die Wahrscheinlichkeit, daß eine größere Leichtigkeit für die Bewegung von Westen nach Osten, als für die im entgegengesetzten Sinne vorhanden sey. Man würde ein bei weitem bedeutenderes Resultat erhalten haben, wenn man den Hauptplaneten die bekannten Monde, deren Anzahl jetzt auf 18 sich beläuft, zugezählt hätte, und ein Resultat, das der Einheit noch um Vieles näher gekommen wäre, wenn man, als von derselben Ursache abhängig, die Gleichförmigkeit angesehen hätte, mit welcher die beobachteten Umwälzungen verschiedner dieser Körper geschehen.

Einige Autoren haben diese Wahrscheinlichkeit auf eine etwas abweichende Art geschätzt, indem sie hierbei von dem §. 70. aufgestellten Grundsatze ausgiengen; wobei sie aber darauf sich beschränkten, den Fall, wo eine absolute Ursache statt haben würde, mit dem zu vergleichen, wo die beiden entgegengesetzten Richtungen gleich möglich wären, wodurch die Hypothesen auf zwei reducirt werden, von welchen die eine für das geschehene Ereigniß, die durch die Einheit vorgestellte Gewißheit giebt, und die andere die

Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^{11}}$. Die Wahrscheinlichkeit der erstern Hypothese ist hiernach

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2^{11}}} = \frac{2^{11}}{2^{11}+1} = \frac{2047}{2048},$$

wenn man nur die Hauptplaneten in Rechnung bringt. Dieser letztere Bruch ist kleiner als der obige, aber ich glaube, daß die Betrachtungen, durch welche er abgeleitet ist, nicht allgemein genug sind. Es ist wahr, wenn man nur auf die Richtung der Bewegung Rücksicht nimmt, so findet man nur zwei Fälle; aber kann man sie als gleich möglich annehmen, wenn man über die Art und Weise, wie die Bewegung eingedrückt worden ist, sich in völliger Ungewißheit befindet; kann ihre Richtung nicht anstatt einer einfachen Wirkung das Resultat des Zusammenflusses verschiedner Fälle seyn, die man folglich in allen möglichen Verhältnissen mit denen annehmen muß, die die entgegengesetzte Richtung gegeben haben würden?

Die engen Grenzen, in welchen die Neigungen der Bahnen der ältern bekannten Planeten eingeschlossen sind, sie nehmen nur am Himmel eine Zone von ungefähr 18 Grad Breite ein, bildeten auch eine große Wahrscheinlichkeit, um alle Bewegungen dieser Körper einer einzigen Ursache zuzuschreiben; aber die Entdeckung des Planeten Pallas, dessen Bahn eine Neigung von mehr als 34 Grad gegen die Ekliptik hat, ändert diese Wahrscheinlichkeit in etwas, die noch durch die Entdeckung solcher Körper sich verändern würde, die mehr noch von der Ekliptik sich entfernen, und mehr excentrische Bahnen durchlaufen, und so den Uebergang von den Planeten zu den Kometen, deren Bewegung in jeder Stellung und Neigung statt hat, bilden würden.

§. 97.

Die in dem vorhergehenden §. gebrauchte Formel läßt sich auch bei einer Frage anwenden, die die Philosophen des vergangenen und des gegenwärtigen Jahrhunderts behandelt haben, nämlich auf die von der Verbindung der Wirkungen zu den Ursachen. Einige, wie Hume, haben verneint, daß wir irgend einen soliden Grund hätten, eine Abhängigkeit zwischen zwei Wirkungen anzunehmen, die sich beständig begleiten oder auf einander folgen. Andere, denen dieser Skepticismus, dessen Folgen sich auf unsere häufigsten und nothwendigsten Handlungen ausdehnen müßte, verwegen vorkam, behaupteten, daß ein inneres Gefühl, ein Gesetz unserer intellectuellen Organisation uns antrieb, jede Wirkung auf eine Ursache, die wir immer in der vorhergehenden fänden, zurückzuführen. Noch andere endlich, indem sie befürchteten, diese Gesetze der Vernunft, diese Grundfacta, die so sehr den angebornen Ideen ähnlich sind, zu sehr zu vervielfachen, glaubten, daß die Betrachtung der verschiednen Stufen der Wahrscheinlichkeit nicht blos die moralischen Phänomene erklären, sondern auch ein Maaß für das Zutrauen geben könne, das wir zu unsern Erkenntnissen fassen könnten oder sollten. Sie vermieden so den Pyrrhonism und den absoluten Dogmatism Lehren, die gleich absurd sind, aber von welchen die zweite, die so oft der Habsucht und dem Ehrgeize gewisser Menschen diente, und die der Faulheit aller schmeichelt, weit gefährlicher als die erste ist, die immer in den Grenzen der Speculation beschränkt bleibt, da selbst nach dem hitzigsten Streite über die Existenz der Körper der entschiedenste Pyrrhonist es nicht unternehmen wird, durch die Mauer zu gehen, um aus seinem Zimmer zu kommen.

Diese den Mittelweg einschlagende Lehre, die man den graduirten Scepticismen nennen könnte, zuerst durch Helvetius aufgestellt, wurde durch Condorcet als die einzige empfohlen, die allen Schwierigkeiten abhelfen könnte, weil

sie ganz auf Erfahrung beruht, von woher alle unsere Ideen ihren Ursprung nehmen. Er ist öfters in seinen Werken darauf zurückgekommen. Aber Mendelsohn scheint der erste gewesen zu seyn, der besonders die Wahrscheinlichkeit auf die Verbindungen der Wirkungen zu den Ursachen angewendet hat, in einer Abhandlung über Evidenz, die im Jahr 1763 von der Berliner Academie gekrönt wurde. Er schließt wie folgt:

„Haben wir ein einziges mal erfahren, daß zwei Begebenheiten A und B sich unmittelbar folgen, so bieten sich uns drei verschiedne Annahmen dar: Entweder hat A seinen Grund in B, oder A und B haben ihren gemeinschaftlichen Grund in einer dritten Ursache C, oder es hängt endlich jede von beiden von einer eignen oder unabhängigen Ursache ab In den ersten beiden Fällen müssen sie immer aufeinander folgen, im dritten Falle aber ist ihr Zusammentreffen die Wirkung des Zufalls, sie können eben sowohl getrennt, entfernt von einander, als vereint vorkommen." Man sieht hieraus schon, daß wenn man den Einfluß der Wiederholungen der Urtheile der Möglichkeit auf unserm Geist (§. 5 u. 6.) annimmt, es dahin führen muß, eine Verknüpfung zwischen A und B, sey es unmittelbare oder eine mittelbare anzunehmen. „Wenn sie also von neuem erscheinen, und bei ihrem Erscheinen jedesmal vereint vorkommen, so wird es wahrscheinlich, daß diese Vereinigung ihren Grund in einer der erstern beiden Hypothesen hat. Je öfters diese Wiederholung statt hat, und das Zusammentreffen beider Begebenheiten dabei immer bemerkt wird, desto mehr wächst diese Wahrscheinlichkeit, sie kann so ins unendliche wachsen." Wir wollen sehen, wie die Rechnung diese letztere Behauptung rechtfertigt.

§. 98.

Man hat eine große Anzahlmal nach einander das aufeinander folgende oder gleichzeitige Erscheinen der Begeben-

heiten A und B beobachtet; die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Erscheinen aus einer großen Möglichkeit folgt, wird erhalten, wenn man die Wahrscheinlichkeit der Hypothese sucht, nach welcher das Verhältniß der Fälle, die dem Zusammentreffen beider günstig sind, wenig von der Einheit verschieden ist; und um es deutlicher zu machen, kann man meines Erachtens die Frage folgendermaßen ausdrücken: Man hat aus einer Urne (mit der Vorsicht, sie immer wieder herein zu werfen) eine große Anzahl Loose gezogen, die mit AB bezeichnet waren; enthielt die Urne nur Loose dieser Art, so wäre das Zusammentreffen der Buchstaben A und B nothwendig. Aber dieses ist unbekannt, so lange man noch nicht alle Loose herausgezogen hat. Es wird daher gefragt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältniß der Anzahl Loose von der Gattung der herausgezogenen, zu der Anzahl aller Loose innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen sey?

Es bezeichne m die Anzahl der Loose, a einen der Einheit sehr nahe kommenden Bruch: die Wahrscheinlichkeit, daß das unbekannte Verhältniß zwischen a und 1 falle, wird ausgedrückt durch

$$\frac{S_1^{(m)} - S_a^{(m)}}{S_1^{(m)}} = 1 - \frac{S_a^{(m)}}{S_1^{(m)}} \quad (\S.\ 93.)$$

und setzt man diese Wahrscheinlichkeit $= P$, so ist

$$P = 1 - a^{m+1} \quad (\S.\ 83.).$$

Da $a < 1$, so kann der Werth von a^{m+1} so klein werden, als man nur immer will; der Werth, der, wenn a nur wenig von der Einheit verschieden ist, nicht schnell abnimmt, wird dieses, sobald m sehr groß ist. Es sey z. B.

$$a = \frac{1000000}{1000001}$$

und man erhebe es zur 100 000 000ten Potenz, so findet man leicht, mittelst der Logarithmen, daß diese Potenz der Einheit durch eine Zahl von 44 Stellen getheilt, gleich sey; und da dieses die Wahrscheinlichkeit des Entgegengesetzten von dem, was man sucht, ist, so kann man daraus abnehmen, wie sehr diese letztere der Einheit sich nähert.

Nimmt man P als bekannt und a als unbekannt an, so erhält man $a = \sqrt[m+1]{(1 - P)}$. Setzt man $P = \frac{1}{2}$ und läßt m immer 100 000000 bedeuten, so findet man

$$a = 0,99999993,$$

ungefähr, ein Bruch, der sehr wenig von der Einheit verschieden ist, und dieses Verhältniß, der mit AB bezeichneten Loose, zur Zahl aber, wird die Grenze seyn, die die wahrscheinlichen Verhältnisse von denen, die es nicht sind, trennt, so daß dasjenige, was nur um etwas geringer ist, schon wahrscheinlich wird.*)

---

*) Hat man nicht hinlänglich große logorithmische Tafeln, um diese Rechnung ausführen zu können, so kann man sich der Formel bedienen

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} \frac{\text{Log. a}}{\text{Log. e}} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} \left(\frac{\text{Log. a}}{\text{Log. e}}\right)^2 + \text{etc.}$$

Man sehe §. 125. des ersten Buchs von Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Nur bedient sich Euler der Hyperbolischen Logarithmen, wo also Log. e = 1, und daher fehlt im Divisor dieser Factor. U.

Man muß hier Log. e = 0,43429 setzen, a in 1 — P und x in $\frac{1}{m+1}$ verwandeln; und wenn m + 1 sehr groß ist, so sind die beiden ersten Glieder hinreichend. Im obigen Beispiele, wo 1 — P = ½ erhält man

$$2^{-\frac{1}{m+1}} = 1 - \frac{1}{m+1} \,.\, \frac{30}{43} = 1 - \frac{1}{100000001} \,.\, \frac{3}{4}$$

ungefähr.

Diese Resultate können einen Begriff davon geben, was der numerische Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für die Abhängigkeit der Phänome seyn muß, die, wie z. B. das Zusammenstoßen und die daraus folgende Ortsveränderung der Körper, so ungemein oft in einem einzigen Tage und an einem einzigen Orte wiederholt werden, wenn man sie auf alle bekannten Jahrhunderte und auf die ganze Erde ausdehnt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß es sehr wenig Fälle giebt, die der steten Bewegung der Erde entgegen sind, schon sehr bedeutend, wenn man sie aus der Zahl des Sonnen Auf- und Untergangs bis zu den frühesten Zeiten gezählt folgert, wird um vieles größer noch, wenn man auf die bekannten Gesetze der Bewegungen unseres Globen Rücksicht nimmt; denn die Uebereinstimmung der beobachteten Lagen mit den berechneten, deren Anzahl fast unendlich ist, müssen als eben so viele neue Begebenheiten bildend angesehen werden.

Es fehlt ohne Zweifel noch viel, daß die Begebenheiten in Verhältniß zu andern Verbindungen, die als Naturgesetze angesehen werden, so vervielfältigt wären; wie auch daß der größte Theil unserer Inductionen auf solche Gründe sich stützen; aber man muß den Einfluß wohl beachten, den die am häufigsten wiederholten Begebenheiten in Vergleich zu denen äußern, die weniger oft vorkommen. Sobald die erstern uns den Gedanken von der Beständigkeit der Naturgesetze haben annehmen lassen, so dehnen wir sie auf alles aus, was unter unsern Augen vorgeht, und auf alle Fälle, die uns vertraut sind, unser Zutrauen in der Verbindung der Wirkung zu den Ursachen wird zur Gewohnheit, und kann aus diesem Grunde um vieles schneller wachsen, als die durch obige Rechnung angezeigte Wahrscheinlichkeit.

Aber der wesentliche Zweck unserer Beobachtungen, nämlich das, was geschehen kann, vorher zu sehen, die Wahrscheinlichkeit für das geschehen eines neuen Ereignisses, das der

schon beobachteten gleich ist, interessirt uns am meisten, denn es kann dazu dienen, unser Benehmen darnach einzurichten; für diesen Fall aber nimmt die Rechnung einen bei weitem kürzern Weg; denn der Ausdruck $\frac{m+1}{m+2}$ (§. 86.) ist, wenn m sehr groß ist, sehr wenig von der Einheit verschieden. Der Satz z. B. die Sonne wird Morgen aufgehen, hat, wenn man dabei einen verflossenen Zeitraum von 6000 Jahren in Rechnung bringt, eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{2191501}{2191502}$. Nehmen wir eine Zeit von mehr als einem Tage, so nimmt die durch die Formel $\frac{m+1}{m+p+1}$ ausgedrückte Wahrscheinlichkeit immer mehr und mehr ab, und kann äußerst schwach werden; aber diese Folgerung hat nichts Auffallendes, denn die Zukunft kann Gesetze enthüllen, die uns noch unbekannt sind. *)

---

*) Bertrand de Genéve (Developpemens nouveaux de la partie élémentaire des Mathématiques t. I. pag. 418.) hat ebenfalls obige Aufgabe behandelt, aber nur mittelst der Wahrscheinlichkeiten a priori; und er hat als einfache Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses die angenommen, die $\frac{1}{2}$ für die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß m mal nach einander sich wiederholen wird, giebt; denn die Hypothese für diese Wahrscheinlichkeit begünstigt weder das Hervorbringen der Reihe der beobachteten Begebenheiten, noch ist sie ihr entgegen. Nach diesem Verfahren hat man

$$x^m = \tfrac{1}{2} \text{ daher } x = \frac{1}{\sqrt[m]{2}}$$

und da nach diesem Ausdrucke x sich um so mehr der Einheit nähert, je größer m wird, so kann man alsdann auch um so mehr die Erscheinung eines Ereignisses erwarten, das den schon statt gehabten ähnlich ist. Die Formel der vorhergehenden Note giebt in dem Falle, wenn m bedeutend ist

§. 99.

Es fehlt uns also nicht an hinlänglichen Gründen, um die Rechtmäßigkeit der Schlüsse von der Vergangenheit auf die Zukunft darauf zu stützen, und eben hierin besteht die Macht der Analogie; aber ist es nicht Gelehrten eben sowohl wie dem gemeinen Manne zugekommen, daß, indem sie sich zu sehr auf diese Macht verließen, sie in Irrthümer verfielen und voreilige Behauptungen wagten? Und doch konnten sie keiner andern Stimme folgen, um die Wahrheit zu entdecken. Man prüfe die in der Note §. 1. angeführten Regeln von Descartes oder die von Newton mit Aufmerksamkeit, und man wird nichts anderes darinnen finden, als Vorsicht, die möglichst genaueste Aufzählung der verschiednen Seiten eines Gedanken, oder der Verbindungen verschiedner Begebenheiten zu erhalten. Ist die Aufzählung vollständig, daß die Abhängigkeit, die man in allen Fällen dieselbe findet, nothwendig wird, so erhält man Gewißheit, sey es physische oder intellectuelle, wenigstens für jeden unzerlegbaren Theil des Raisonnements oder für jede Begebenheit besonders. (§. 1. u. 2.) Außerdem kann man nur die der Analogie günstigen Fälle mit den entgegengesetzten vergleichen; und wenn sich auch anfangs keine der letztern Art zeigen, so ist man doch nicht versichert, daß keine vorkommen werden. Eine Hypothese, die eine große Anzahl von Begebenheiten vollständig erklärt, ist doch nichts weiter als wahrscheinlich, und die Rechnung schätzt den Grad des Zutrauens, den sie verdient; aber so lange noch nicht alle Begebenheiten beobachtet und mit der

---

$$x = 1 - \frac{1}{m} \cdot {}^3/_4 = \frac{m - {}^3/_4}{m};$$

was nicht viel von $\frac{m+1}{m+2}$ verschieden ist; aber Bertrand hat nur eine einzige Hypothese berücksichtigt, während die directe Methode sie alle umfaßt.

größten Genauigkeit gemessen sind, kann keine Hypothese sich in Wahrheit verwandeln, die glücklichsten sind doch nur künstliche Methoden, um die Abhängigkeit einer größern oder geringern Anzahl von Begebenheiten durch eine einzige Formel zu verknüpfen, oder durch einen einzigen Ausdruck zu verstehen.

§. 100.

Dies waren die Grundsätze, nach welchen Condorcet, indem er absolute Gewißheit nur in das Bewußtseyn einer gegenwärtigen Empfindung, und in die augenblicklichen und völlig überzeugenden Wahrnehmungen der Uebereinstimmung oder der Verschiedenheit zweier Ideen setzte, die allgemeine Neigung an die Rückkehr der Begebenheiten, die wir mehrmalen an uns oder an anderen Gegenständen beobachtet haben, zu glauben, als den Grund aller unserer übrigen Kenntnisse angab; und er machte zwei Klassen von Wahrscheinlichkeiten, von welchen die erstere diejenigen enthielt, deren Unterschied von der Einheit unangebbar, aber so klein ist, daß es überflüssig seyn würde, sie mit in Rechnung zu bringen, und auf welche wir uns durch eine Gewohnheit verlassen, von der wir uns keine Rechenschaft geben können, wie wir es bei den Wahrscheinlichkeiten der zweiten Klasse thun oder doch immer thun sollten.*) So bil-

*) Zu Anfang der Wahrscheinlichkeiten der ersten Klasse befindet sich die, welche unsern Glauben an die Existenz der Körper begründet, oder „unsere Ueberzeugung, daß die Reihe der Empfindungen, die in einem Augenblicke bei uns hervorgebracht worden sind, sich stets unter ähnlichen Umständen auf gleiche Art wiederholen werden, oder mit gewissen Veränderungen, die stets mit Veränderung der Umstände verknüpft sind.“ (Essai sur l'application de l'Analyse à la Probabilité, etc. Vorrede pag. XII.)

det sich eine ununterbrochene Steigerung von den Sätzen die auch nicht den geringsten Zweifel Raum lassen, bis zu den Ungewissesten. Die Betrachtung unserer Kenntnisse aus diesem Gesichtspunkte giebt dem Scepticism eine solide Grundlage „der in den griechischen Schulen zu einer lächerlichen Aufschneiderei ausartete; der aber bei den Neuern befreit von diesen pedantischen Subtilitäten wahre Philosophie geworden ist, und nicht etwa darin besteht, alles zu bezweifeln, sondern alle Beweise abzuwiegen und sie einer strengen Analyse zu unterwerfen; nicht zu beweisen, der Mensch könne nichts wissen, sondern genau zu unterscheiden, und als Gegenstand seiner Wißbegierde das zu machen, was ihm zu wissen möglich ist.*)

§. 101.

Da die mathematische Theorie mit den einfachen Ansichten des schlichten Verstandes, und mit den Resultaten der Erfahrung dahin zusammenstimmen, daß sie beweisen, die Gesetze der Natur können sich wenigstens in der Länge der Zeit durch die Folge der Begebenheiten, die jene Gesetze zur Ursache haben, bewähren; so folgt, daß wir bei Aufgaben, deren Elemente zu verwickelt sind, um die Verbindungen zu erschöpfen, die Natur befragen, die Begebenheiten aufzählen und vergleichen müssen, um die ganze Kette durchlaufen zu können; kurz, daß wir a posteriori von dem urtheilen müssen, was unmöglich vorher gesehen werden kann. Dieses ist die Grundlage und das Motiv der Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Physik, Moral und Politik.

Diese Anwendung wird immer zu nützlichen Resultaten führen, oder in jenem wohlthätigen Zweifel erhalten

*) Eloge de Franklin. Oeuvres de Condorcet tom. IV. p. 94.

der gefährlichen Irrthümern vorbeugt, wenn man sie mit Vorsicht macht, nämlich wenn man mit Sorgfalt die Begebenheiten nach den verschiednen Umständen, die sie darbieten, unterscheidet, um so zu vermeiden, daß man nicht auf alle beziehe, was nur einigen zukömmt, daß man nicht die Ansichten vermenge, die getrennt seyn müssen, und daß man nicht Schlüsse für allgemein nehme, die nur innerhalb gewisser Grenzen wahr sind. Dieses sind die Vorwürfe, die man zuweilen mit Recht sehr gelehrten Rechnungen machen kann, in deren Resultate aber man weder große Evidenz, noch einen nahen Nutzen findet. Was man übrigens beachten muß, ist, daß man aus Mangel des Gegebenen sich genöthigt sah, sie auf oft sehr abweichende Annahmen zu stützen, wodurch ihr Gang so verwickelt und ihre Resultate so ungewiß wurden. Eine hinlängliche Anzahl von Beobachtungen, die von allen den gesuchten Folgerungen fremden Umständen befreit sind, wird immer ein eben so einfaches als sicheres Mittel darbieten, diese Folgerungen zu entdecken, oder ihre Ausdehnung oder ihren Werth zu ermessen, und folglich die Verbindungen zu schätzen, die sie herbei geführt haben.

Einfache treu geführte Register werden immer hinreichen, um die Wirkungen einer Auflage durch die Veränderungen, die sie in dem Aufwande und der Consumtion hervorbringt, zu erkennen; und die Register von dem Handel durch die Bewegung des Eingangs und Ausgangs werden dazu dienen, die Fortschritte der Manufacturen und der Kultur des Landes kennen zu lernen.

Auch kann man von dem Schulwesen durch die Verzeichnisse von den Subjecten urtheilen, die sich nach Verlauf mehrerer Jahre gebildet haben; von der bürgerlichen Gesetzgebung durch die Menge der Processe, die sie hervorgebracht oder denen sie vorgebeugt hat; von der kriminellen Gesetzgebung, durch die Zahl der Schuldigen, die sie verdammt, oder freigesprochen und wieder aufgenommen hat. Um aber von diesen Beobachtungen Gebrauch machen

zu können, ist es erforderlich, daß die Prüfung des Systems fortgesetzt, daß die Resultate mit Unpartheilichkeit gesammelt sind, um mit Genauigkeit gezählt werden zu können.

Ich sage gezählt; denn so lange man es noch nicht dahin bringt, verfällt man fast immer in ausschweifende Declamationen. Die Regierung kann keine Maaßregeln nehmen, durch die nicht das Interesse einer großen Anzahl Individuen beeinträchtigt wird; und wenn die Personen, die es betrifft, Ansehen genug haben, zu reden wissen, oder für sich reden lassen, so werden die dem größten Theile der Nation nützlichsten Maaßregeln nicht bestehen können; einige mit Nachdruck oder List angeführte Nachtheile werden eine Widerrufung veranlassen, während eine genaue Aufzählung ihrer Wirkungen, das Uebergewicht ihrer Vortheile über die Nachtheile derselben unbestreitbar dargethan haben würde. Indem man sich von diesem Verfahren entfernte, hat man es selbst angreifen können.

Um ein Beispiel von diesen seichten Urtheilen zu geben, die man durch den ersten Eindruck über Gegenstände fällt, die einer genauen Schätzung fähig sind, will ich die schönen Resultate anführen, die Duvillard in seiner Untersuchung über den Einfluß der Blattern auf die Sterblichkeit erhielt. Er hat aus den Sterblichkeitstabellen von Genf, Haag und Berlin bewiesen, daß nach zurückgelegtem 30sten Jahre die Blattern für diejenigen, die sie noch nicht gehabt haben, um so weniger gefährlich sind, je weiter sie im Alter vorrücken. Die gewöhnliche Meinung ist diesem Resultate entgegen, und es läßt sich leicht zeigen, wie sie sich hat bilden können, bevor man genaue Beobachtungen über die Anzahl der durch die Blattern bei verschiednen Alter verursachten Todesfälle gemacht hatte. Man war um so mehr über diese Todesfälle betroffen, da sie später nach der gewöhnlichen Epoche dieser Krankheit vorfielen. Die Wichtigkeit der Personen, die sie hinwegrafft, für die Gesell-

schaft, und eine Gefahr, die man nur als der Jugend drohend anzusehen gewohnt war, haben stark auf die Einbildung der Beobachter gewirkt; so haben rein moralische Eindrücke bei einem Urtheile mit gewirkt, wo nur die Rechnung in Anschlag hätte gebracht werden sollen. Was hier geschehen ist, hat bei allen den Umständen noch um vieles mehr Kraft, wo das Interesse und die Leidenschaften bedeutend mitgewirkt haben. Auch hat man bis jetzt nur von dem, was die Sterblichkeit der Individuen und ihre Vermehrung betrifft, einigermaßen lange die Begebenheiten gesammelt; daher haben eine große Menge Schriftsteller, die über Staatsverwaltung geschrieben haben, in diesen Begebenheiten den Maaßstab gesucht, um den Werth der verschiednen Verwaltungs- und Regierungssysteme zu würdigen. Aus diesem Grunde will ich mit einiger Genauigkeit die Art angeben, wie hierbei Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden kann.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens.

§. 102.

Das Anfertigen der Sterblichkeitstabellen würde sehr einfach seyn, wenn man aus den Registern der Verstorbenen die Todesfälle einer großen Anzahl Individuen nach den Registern der Geburten ausheben könnte, um mittelst diesem bestimmen zu können, wieviel zu Ende eines jeden Jahres von jedem Alter noch übrig sind. Dieses Mittel aber ist äußerst selten anwendbar; denn Resultate dieser Art können nur alsdenn Zutrauen verdienen, wenn sie aus einer großen Anzahl Begebenheiten abgeleitet sind, befindet man sich also an einem Orte von geringer Bevölkerung, so muß man sie aus den Registern einer langen Reihe von Jahren ausziehen, um sie zu der Anzahl der gleichzeitigen

Geburten, die in einer großen Stadt vorkommen, zu erheben. Aber wer wird in dem einen wie in dem andern Falle es durchzusetzen sich getrauen, ein jedes Individuum bei vorkommenden Ortsveränderungen oder Auswanderungen immer vor Augen zu behalten, durch die Unvollständigkeiten der Register und die große Anzahl der öfters vorkommenden Namen, die schon allein häufig eine Menge Verwirrungen veranlassen können, sich nicht irre leiten zu lassen? Und da, wie man bald sehen wird, und wie auch leicht voraus zu sehen ist, die Zeit auf die Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens, sey es durch politische Veränderungen, oder durch die Vervollkommnungen in Regierung und Polizei, die durch die Aufklärung herbeigeführt werden, Einfluß hat; so stimmen Tabellen, die durch Beobachtungen, welche einen zu großen Zeitraum umfassen, entstanden sind, weder mit der Epoche, in der sie beginnen, noch mit der gegenwärtigen zusammen. Es zeigen sich also hier Schwierigkeiten, die das oben angezeigte Verfahren, einige besondere Fälle ausgenommen, die ich weiter unten anführen werde, fast unmöglich machen; auch hat man einen ganz andern Weg eingeschlagen.

Die älteste Sterblichkeitstabelle, die man hat, ist die, welche Halley aus den Registern der Stadt Breslau in Schlesien abgeleitet hat, und die er in den philosophischen Transactionen von 1693 bekannt gemacht hat. Er wählte diese Stadt, weil die Zahl der Geburten und die der Todesfälle hier sehr wenig verschieden sind, und glaubte, daß die Bevölkerung dieses Orts ungefähr immer in demselben Zustande verbleibe, (im Beharrungszustande sey) und daß folglich der Verlust an Individuen von verschiednem Alter genau der Sterblichkeit in diesem Alter proportionirt sey, wonach man also die in jedem Jahre verstorbenen Individuen, als wären sie sämmtlich in diesem Jahre geboren, ansehen konnte, und ihr respectives Alter als die Art anzeigend, wie nach und nach eine gleiche Anzahl zugleich geborner Individuen, absterben. Halley summirt also die

Zahl der in Breslau vom Jahre 1687 bis 1691 vorgefallenen Todesfälle; zerlegte diese Zahl nach dem verschiednen Alter, zog hierauf von der ganzen Zahl die der Kinder ab, welche in ihrem ersten Jahre verstorben waren, der Rest zeigte die Zahl der Ueberlebenden, von welcher er hierauf die der Kinder abzog, die in ihrem zweiten Jahre sterben, um die der Ueberlebenden zu erhalten u. s. f.; und endlich reducirte er diese verschiednen Zahlen, um die Rechnung zu erleichtern, auf Proportionalen von 1000, wodurch er die Kinder von 1 Jahr ausdrückte. *)

Das Bequeme dieser Verfahrungsart ergänzt, was ihr an Genauigkeit abgeht, da man so häufig die Anwendung wiederholen kann, und da die Irrthümer, die der Gegenstand mit sich bringt, durch Verschiedenheit der Orte und Zeiten sich gegenseitig aufheben, so kann man zu mittlern Werthen gelangen, die der Wahrheit nahe genug kommen, um interessante Resultate darzubieten. Smart hat sie für die Stadt London benutzt; Dupré de Saint-Maur für Paris, und sie ist überhaupt fast für alle Hauptstädte und noch für viele andere Orte angewendet worden. Aber in mehreren Tabellen, z. B. in den von Dupré de Saint-Maur haben sich bedeutende Unrichtigkeiten eingeschlichen, weil das Alter der Verstorbenen öfters fehlerhaft ist; da Personen, die es angeben, entweder selbst nicht gehörig unterrichtet sind, oder nur eine runde Zahl angeben; so findet man oft 60 Jahr, wo 59 oder 58 stehen sollte, und hieraus ergeben sich in dem erstern dieser Alter mehr Todesfälle, als wirklich statt gehabt haben. Diese Unrichtigkeit bemerkt man bald durch die Unregelmäßigkeit, mit

---

*) Ist nämlich die Bevölkerung eines Orts im Beharrungszustande, und es sterben im Durchschnitte jährlich daselbst n Menschen, unter welchen z. B. p die 20, q die 30 und r die 40 Jahre alt sind, sich befinden, so kann man folgern, daß von n zugleich gebornen p in ihrem 20sten, q in ihrem 30sten, und r in ihrem 40sten Jahre sterben. U.

welcher die Zahlen in der Tabelle aufeinander folgen, und man muß sie auf die wahrscheinlichste Art zu verbessern suchen, indem man die Differenzen übereinstimmender macht: dieses hat auch Saint-Cyran bei den Tabellen von Dupré de Saint-Maur gethan.*)

Das Zusammentreffen der erforderlichen Umstände, um die Individuen einzeln folgen zu können, hat bis jetzt nur bei einigen Klassen, deren Sterblichkeitsordnung von der des Menschengeschlechts überhaupt sehr verschieden ist, statt gehabt. Dieses war der Fall bei den Besitzern der holländischen Leibrenten, von welchen Kerseboom**) die Sterblichkeitstabelle eingerichtet hat; bei den Besitzern der französischen Leibrenten, die unter den Namen der Tontiniers bekannt sind, und bei den Mönchen des Benedictiner-Ordens, von welchen Deparcieux die Tabellen angefertigt hat etc. Das Interesse der Regierung, die bei einer Gesellschaft vernünftiger Personen eingeführte Ordnung, geben den Registern dieser Klassen eine Genauigkeit und Deutlichkeit, die ihre Benutzung außerordentlich erleichtern; aber die Resultate weichen sehr von denen des gewöhnlichen Lebens ab. Nur für Kinder, die gesund gebaut zu seyn scheinen, und im allgemeinen für Erwachsene von guter Leibesbeschaffenheit nimmt man Leibrenten. Diejenigen, die ein solches Einkommen genießen, führen meistens eine einfache und mäßige Lebensart, wodurch ihr Leben verlängert wird; viele sind unverheurathet; die Mönche waren es alle, und giengen nicht eher in den Orden, als nach dem sie den Gefahren der Kindheit und Jugend entronnen waren. Die für solche Individuen berechneten Tabellen können

---

*) Siehe dessen Recherches sur les Rentes viagéres 2te Theil p. 23.

**) Kerseboom Verhandeling tot een proeve om te weeten de probable menigte des Volks in Holland. Haag 1738.

daher auch nur für diejenigen benutzt werden, die in denselben Umständen sich befinden; wie man sehen wird, wenn ich die Theorie der Leibrenten vortragen werde. Die Aufgaben, mit welchen ich mich zuerst beschäftigen will, beziehen sich blos auf das Leben an und für sich betrachtet, und auf die Bevölkerung, und ich setze dabei voraus, daß die künftigen Ereignisse sich eben so, wie die vergangenen folgen werden, was erlaubt ist, da die Zahl der letztern in Verhältniß zu der der erstern als sehr groß angesehen werden kann.

§. 103.

Die einfachste dieser Fragen ist, die Wahrscheinlichkeiten der fernern Lebensdauer, für jedes Alter auszumitteln, z. B. die Wahrscheinlichkeit noch 10 Jahr zu leben, wenn man schon 40 alt ist, wird erhalten, wenn man durch die Anzahl der Personen von diesem Alter die Anzahl derjenigen theilt, die das 50te Jahr erreichen. Die in dem Annuaire du Bureau des Longitudes eingerückte Tabelle für das Gesetz der Sterblichkeit in Frankreich, giebt für die erstere dieser Zahlen 369404, und für die andere 297070, woraus $\frac{297}{369} = 0,805$ ungefähr folgt; die über die Londner Register durch Price eingerückte Tabelle $\frac{224}{322} = 0,696$; die von Wien durch Süßmilch $\frac{220}{298} = 0,738$; die von Berlin durch denselben $\frac{222}{300} = 0,747$; endlich die des platten Landes in der Schweiz durch Muret $\frac{431}{506} = 0,852$ eine Wahrscheinlichkeit, die stärker als alle vorhergehenden ist.

§. 104.

Man sucht gewöhnlich auch die wahrscheinliche Lebensdauer für ein gegebnes Alter. Man versteht unter

dieser Dauer die Anzahl Jahre, nach welcher die Wahrscheinlichkeit noch zu leben, und die, daß man nicht mehr leben werde, dieselben sind, also jede $= \frac{1}{2}$. Es ist gewiß, daß dieses alsdann der Fall ist, wenn die Zahl der Personen des Alters, von dem man ausgeht, auf die Hälfte reducirt ist. Sucht man diesen Ausdruck, indem man von der Geburt zu zählen anfängt, so findet man nach den Tafeln von Dupré de Saint-Maur, daß diese Zahl in Paris zwischen 8 und 9 Jahren fällt; in London etwas unter 3 Jahr; in Wien etwas unter 2 Jahr; in Berlin etwas darüber; aber um vieles weiter auf dem Lande. Die mittlere Tabelle für ganz Frankreich in dem Annuaire giebt dafür 20 bis 21 Jahr; die für England zwischen 27 und 28 Jahr; die für Brandenburg zwischen 25 und 26; die für die Schweiz 41 Jahr. Dieser ungemeine Unterschied zwischen dem Lande und der Stadt kann nichts anderem als den Folgen des äußersten Elendes, der Unreinlichkeit, der engen Wohnungen und der daraus folgenden Ungesundheit in den Hauptstädten zugeschrieben werden. In Montpellier, einer Stadt, deren Bevölkerung ungefähr auf 32000 Individuen sich beläuft, und wo man die Luft als sehr gesund ansieht, ist diese Zahl dessen ungeachtet nur gegen 6 Jahr.

Da mit 40 Jahren gewöhnlich die Umstände eines Menschen in Ordnung sind, und er nun anfängt, die Früchte seiner frühern Arbeit zu genießen, so kann man neugierig seyn, die wahrscheinliche Lebensdauer für dieses Alter zu kennen. Die oben angeführten Tabellen geben für Paris mehr als 21 Jahr, in Frankreich im Durchschnitt 23 Jahr; in London 18; in Wien mehr als 19; in Berlin eben so, in der Schweiz nahe an 25.

Der größte Theil dieser Tabellen erstreckt sich nur wenig über 90 Jahr, die man als das größte Alter ansehen kann, da es äußerst selten ist, nicht blos dieses Alter zu überleben, sondern selbst es nur zu erreichen. Das Verhältniß der Anzahl Individuen von diesem Alter zu der

der Geburten, wird als Maaß der größten Lebenslänge für den Ort, für welchen die Tabellen angefertigt sind, angesehen werden können. Die Tabellen des Annuaire geben für Frankreich $\frac{38}{10000}=0{,}0038$; die Tabelle von London geben $\frac{3}{1518}=0{,}0020$; die von Wien $\frac{3}{1495}=0{,}0020$; die von Berlin $\frac{6}{1427}=0{,}0042$ und die von der Schweiz 0,0050; diese letztere Wahrscheinlichkeit, größer als alle übrigen, wird noch von der übertroffen, die die von Gorsuch aus den Registern einiger Kirchspiele in England berechneten Tabellen darbietet, und die 0,0070 beträgt.

Man darf bis jetzt noch nicht zuviel auf diese Resultate rechnen, da die Zahl der Beobachtungen, die auf dieses letztere Alter sich erstrecken, sehr klein ist. Die Tabellen, welche Kerseboom über das Absterben der Rentenirer in Holland aufgesetzt hat, und die von Deparcieux aus den Registern der französischen Tontinen, obgleich sie sich auf eine Klasse von ausgewählten Individuen beziehen, erstrecken sich doch nicht bis 100 Jahr; die erstere giebt für 90 Jahr $\frac{10}{1400}=0{,}0071$; die zweite für das Erreichen des 90ten Jahres, wenn man das 3te zurückgelegt hat, 0,0110.

Price sagt, daß die Wahrscheinlichkeit, das 80te Jahr zu erreichen $\frac{2}{43}$ in Pays de Vaud sey, $\frac{2}{45}$ in Brandenburg, $\frac{1}{30}$ in Breslau, $\frac{1}{37}$ in Berlin, $\frac{1}{40}$ in London, $\frac{1}{41}$ in Wien. *)

---

*) Erster Theil der den Institute vorgelegten Memoires pag. 75. Florencourt in seinen Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst Seite 75. u. f. giebt die Sterblichkeitsordnung nach einem reducirten Mittelverhältniß aus Süßmilchs Tafeln, für einige Hauptstädte und für das platte Land, und leitet hieraus, indem er von dem Satze ausgeht, daß auf dem Lande ungefähr zweimal so viel Menschen als in den Städten leben, eine allgemeine Sterblichkeitsordnung ab, die dem Werke Seite 276 angehängt ist. Seine Resultate aber

§. 105.

In den Tabellen, die ich so eben benutzt habe, sind die Geschlechter vermischt; indessen ist die Sterblichkeitsordnung nicht für beide Geschlechter dieselbe, sie ist auch noch nach den Beschäftigungen und andern Umständen verschieden, und man würde ihre Wirkungen bestimmen können, wenn man die Todesfälle in Klassen, die auf diese Umstände Bezug hätten, trennte. Man hat dieses, seitdem man die Nützlichkeit dieser Gattung von Beobachtungen eingesehen hat, zu thun angefangen; aber die Bestimmungen fehlen oft, was die Todesfälle anbelangt; und wenn man sie findet, wird die Arbeit, sie zu ordnen, ungemein schwer, weil man sie mit verschiednen Ansichten immer wieder von vorne anfangen muß. Man würde sie um vieles abkürzen, wenn man Tabellen in der scharfsinnigen Form entwürfe, die Condorcet angegeben hat, um die Begebenheiten einzutragen, oder die Gegenstände durch eine Verbindung von Zeichen zu bezeichnen, die die hauptsächlichsten Eigenthümlichkeiten angeben. *)

---

in den erstern Tabellen sowohl, wie in der letztern stimmen nicht mit den im §. angegebenen Resultaten zusammen. Nach seinen reducirten Tafeln ist die wahrscheinliche Lebensdauer von der Geburt angerechnet in London 12 — 13 Jahr, in Wien und Berlin 5 — 6 Jahr. Nach der von ihm abgeleiteten allgemeinen Sterblichkeitsordnung ist diese 19,74 Jahr, und die wahrscheinliche Lebensdauer im 40ten Jahre 22,71 Jahr. Das Maaß der größten Lebenslänge ist nach dieser Tabelle 0,0077.

U.

*) Man sehe seine Elémens du Calcul des Probabilités p. 31. Wenn diese Formen, in deren Erklärung er nicht Deutlichkeit genug hat bringen können, durch einige Naturkundige richtig verstanden und angewendet worden wären, so ist nicht zu zweifeln, daß sie bald angenommen, und viel mehr noch daraus gefolgert worden wäre, ohne die außerordentliche Kürze in

Wenn man nur den Gang der Resultate verstehen will, so ist es bequem, statt der Tabellen Zeichen zu substituiren, wo die Zahlen entweder durch Linien oder Flächen vorgestellt werden; diese natürlichen Zeichen der Größe machen sie, indem sie unmittelbar die Veränderungen ausdrücken, dem Auge sichtbar, dieses ist das Eigenthümliche der Mortalitäts-Curven. Man nennt die Linien so, welche entstehen, wenn man auf einer in so viele gleiche Theile getheilte Linie, als Jahre, die längste Lebensdauer enthält, senkrechte errichtet, die der Zahl der in jedem Alter noch lebenden Individuen proportionirt sind.

§. 106.

Da jede continuirliche Curve sich durch eine Gleichung ausdrücken läßt, so haben einige Geometer gesucht, auch die Gleichung für die Mortalitätscurve zu erhalten, indem sie alle in der Sterblichkeitstabelle enthaltenen Zahlen durch eine Formel zu verbinden suchten. Lambert fand, daß die Gleichung

$$y = 10000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left\{e^{-\frac{x}{13,682}} - e^{-\frac{x}{2,43114}}\right\}$$

recht gut die Tabelle ausdrücke, die aus den Registern von London angefertigt ist; und Duvillard schlug nach der Analogie vor, im allgemeinen die Gleichung anzuwenden

$$y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left\{e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{n}}\right\}$$

Anschlag zu bringen. Sie ist eine Art Wörterbuch, wo man die Worte durch eine Menge Schlüssel finden kann.

in welcher y die Zahl der Individuen von x Jahren bedeutet, N die Gesammtzahl der Geburten, t das höchste Alter in der Tabelle, e die Grundzahl der hyperbolischen Logorithmen, m, k und n beständige Größen, die für jede Tabelle besonders bestimmt werden müssen.*)

Nur in den ersten Jahren scheint der Gang der Tabellen sehr unregelmäßig; aber die jährliche Zahl der Verstorbenen wird bald für einen mehr oder weniger bedeutenden Zeitraum beständig. Die Tabelle von Breslau z. B. giebt 6 Todesfälle jährlich vom 12ten Jahre bis zum 22, 7 von 22 bis 29 ꝛc., und läßt sich so in arithmetische Progressionen theilen. Moivre fand, daß man,

---

*) Siehe Lamberts Beiträge zum Gebrauch der Mathematik 3ter Thl. p. 483., und Les Recherches sur les Emprunts par Duvillard pag. 8.

Lacroix hat im 2ten Gliede dieser Gleichung $e^{-\frac{x}{31,682}}$ wie auch in Lamberts Beiträgen der Exponent angegeben ist, allein es ist dies ein Druckfehler, wie er selbst später angegeben haben soll, und es muß statt dessen $e^{-\frac{x}{13,682}}$ stehen. Florencourt führt hierbei das Werk von Greg. Fontana, la dottrina degli azzardi in Milano 1776 an. Ich habe selbst nach der so verbesserten Formel einige der von Lambert Seite 484 angegebenen Resultate nachgerechnet, und sie so besser stimmend gefunden. — Lambert fügt dieser Formel noch die Bemerkung bei „die Gleichung ist aus einer Parabel und zween logistischen Linien zusammengesetzt, und überhaupt sehr einfach. Das erste Glied, welches parabolisch ist, würde angeben, daß das menschliche Geschlecht eben so wegstirbt, wie ein cylindrisches Gefäß voll Wasser sich ausleert. Die zwei andern Glieder haben mit dem Erwärmen und Erkälten der Körper viel ähnliches ꝛc. Dessen unerachtet werde ich die hier gegebene Formel nur als etwas mit der Beobachtung noch erträglich gut übereinstimmendes, und statt des Interpolirens brauchbares ansehen.“

ohne sich weit von der Wahrheit zu entfernen, nur eine einzige Progression vom 22ten Jahre bis zum 86 zu bilden braucht; dieses letztere Alter nahm er für das höchste, und sah das höhere Alter als zu selten vorkommend an, als daß es nöthig wäre, es mit in Rechnung zu bringen. Diese Progression, die die Einheit als Differenz hat, und sich mit 86 Jahr auf Null reducirt, giebt für die vorhergehenden Alter eine Anzahl Individuen, die dem Ueberschuß von 86 Jahr über jedes dieser Alter gleich ist, ein Ueberschuß, den Moivre complément de vie nennt. Für ein Alter von 50 Jahren z. B. ist die Zahl der Lebenden 36, die Wahrscheinlichkeit noch 1 Jahr zu leben $\frac{35}{36}$, und die noch 10 Jahr zu leben $\frac{26}{36}$. Aus diesem Gesetz ergiebt sich die sehr einfache Formel $y = 86 - x$.*)

§. 107.

Nach dem ich die Aufgaben untersucht habe, die sich mittelst der Sterblichkeitstabellen fast beim ersten Anblick lösen lassen, so will ich nun zu denjenigen übergehen, die mehr Rechnung erfordern. Die erste, womit ich mich beschäftige, ist die Ausmittelung der mittlern Lebensdauer. Diese Idee scheint Nicolaus Bernoulli zuerst gehabt zu haben, indem er für die Lebensdauer die Formel der mathematischen Hoffnung anwendete, die bei der pecuniaren Werthbestimmung der Zufälle gebraucht wurde. §. 60. u. 65.**) Da jedes Individuum besonders sich einbilden kann, das höchste Alter zu erreichen, so wird die Hoffnung, die es auf alle die Jahre hat, die bis zu diesem Alter vorübergehen müssen, durch die Producte gemessen, wenn man ihre Zahl mit der Wahrscheinlichkeit sie zu erreichen multiplicirt.

---

*) Man sehe Treatise of annuities.

**) Actorum eruditorum supplementa t. IV. p. 159.

Ich nehme ein Beispiel aus der von Deparcieux angefertigten Tabelle. Man findet daselbst, daß bei dem Alter von

87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95

Jahren noch

29, 22, 16, 11, 7, 4, 2, 1, 0

Individuen übrig sind; und weil die Todesfälle zu verschiednen Jahreszeiten statt haben, so nimmt man die Mitte des Jahres als den gemeinschaftlichen Zeitabschnitt. In dieser Hypothese zeigt die Differenz 7 zwischen der Zahl der Individuen, die zu 87 und 88 Jahren noch leben, die Zahl derer die in diesem Jahre gestorben sind, und man kann ihnen nur eine Lebensdauer von 6 Monat oder $\frac{1}{2}$ Jahr anrechnen, und fährt man so fort, so ergiebt sich, daß die Lebensdauer von

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}$$

Jahre

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1

Individuen erreichen. Dieses vorausgesetzt, so kann jeder der 29 Individuen, die 87 Jahr alt sind, unter einer der untern Abtheilungen sich befinden, und die entsprechende Dauer zu erreichen, hat er die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{7}{29}, \frac{6}{29}, \frac{5}{29}, \frac{4}{29}, \frac{3}{29}, \frac{2}{29}, \frac{1}{29}, \frac{1}{29};$$

multiplicirt man daher diese Brüche mit der entsprechenden Dauer, und addirt die Producte, so erhält man $\frac{155}{2.29}$ = 2 Jahr 8 Monat, als wie lang man bei einem Alter von 87. Jahren noch zu leben Hoffnung hat.*)

---

*) Wenn eine gewisse Anzahl zugleich geborner Menschen nach einer einfachen geometrischen Proportion abstürben, so wäre

Der Theil des obigen Verfahrens, in welchem man zuerst die Zahlen 7, 6 ꝛc. mit den entsprechenden Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ꝛc. multiplicirt, und die Producte addirt, läuft augenscheinlich darauf hinaus, die Gesammtdauer der Existenz der Individuen einer jeden Gruppe zu berechnen, und indem man das Resultat $\frac{115}{2}$ durch die Zahl 29 der Individuen theilt, so vertheilt man diese Dauer unter allen gleich.

Substituirt man statt der Zahlen 7, 6 ꝛc. die gleichen Werthe 29—22, 22—16 ꝛc. und zeigt die Mul-

---

die mittlere Lebensdauer von der wahrscheinlichen Lebensdauer §. 104. nicht verschieden. Denn setzt man die Zeit bis zu dem höchsten Alter, von dem Jahre angerechnet, für welches die Lebensdauer aufgefunden werden soll $= n$, und die Anzahl der zu Anfang dieser Zeit lebenden Personen von gleichem Alter $= a$, so ist

$$a : \frac{a}{2} = n : \frac{n}{2}$$

und folglich $\frac{n}{2}$ die wahrscheinliche Lebensdauer dieser Personen.

Denkt man sich ferner ein rechtwinkliches Dreieck, in welchem die beiden den rechten Winkel einschließende Seiten zu einander wie $n:a$ sich verhalten, so wird die Fläche dieses Dreiecks $= \frac{an}{2}$ die ganze Lebenskraft der a Personen zusammengenommen ausdrücken, und folglich ist die mittlere Lebensdauer eines jeden $= \frac{an}{2} : a = \frac{n}{2}$ der wahrscheinlichen Lebensdauer gleich.

Lambert stellt Seite 502 des angeführten Werkes die Frage auf, wie müßte das Gesetz der Sterblichkeit seyn, wenn die wahrscheinliche und die mittlere Lebensdauer zusammentreffen sollte; und er kömmt zu dem Resultate, daß die Sterblichkeitslinie eine gerade Linie seyn müßte, und beweißt so zu gleicher Zeit, daß der Unterschied beider nicht von Fehlern in der Sterblichkeitsordnung, wie viele glaubten, (worunter selbst Daniel Bernoulli war) herkomme. U.

tiplicationen mit der Lebensdauer $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ꝛc. blos an, so wird die Summe der Producte ausgedrückt durch

$$\tfrac{1}{2}(29-22)+\tfrac{3}{2}(22-16)+\tfrac{5}{2}(16-11)$$
$$+\tfrac{7}{2}(11-7)+\tfrac{9}{2}(7-4)+\tfrac{11}{2}(4-2)$$
$$+\tfrac{13}{2}(2-1)+\tfrac{15}{2}(1-0)$$

was man leicht auf den Ausdruck bringen kann

$$\tfrac{1}{2}.29+22+16+11+7+4+3+2+1,$$

und es ist nur noch übrig die Summe der Glieder von 22 an, d. i. die Zahl der Individuen, die zu 88 Jahr noch leben, durch 29 zu theilen, und zu dem Quotienten noch $\frac{1}{2}$ zu addiren.

Diese von Deparcieux angegebene Regel gilt allgemein, so daß wenn a, a′, a″, a‴, a⁗ die Zahl der in den aufeinander folgenden Jahren noch lebenden Individuen bezeichnen (wo a⁗ die letzte Zahl in der Tabelle ist), V die mittlere Lebensdauer, von dem Alter angerechnet, das der ersten Zahl a entspricht, und V′ die für das Alter bei a′ bedeutet, so erhält man

$$V=\tfrac{1}{2}+\frac{a'+a''+a'''+a''''}{a},$$

$$V'=\tfrac{1}{2}+\frac{a''+a'''+a''''}{a'}$$

sucht man aus dem zweiten Ausdrucke den Werth von $a''+a'''+a''''$, und substituirt ihn in die erste Gleichung, so wird diese

$$V=\tfrac{1}{2}+\frac{a'}{a}\,(V'+\tfrac{1}{2})$$

eine Formel, mittelst welcher man leicht V durch V′ findet, und die daher bequem ist, um die mittlere Lebens-

P 2

dauer, die den verschiednen Jahren entspricht, zu berechnen, wenn man bei dem höchsten Alter anfängt.*)

§. 108.

Durch die mittlere Lebensdauer vergleicht man die verschiednen Alter, Orte und Zeiten in Verhältniß zu der Lebenskraft. In Frankreich findet man für diese Dauer nach der Tabelle in dem Annuaire, wenn man von der Geburt ausgeht, 28 Jahr 9 Monat; in London 17 Jahr 11 Monat; in Wien 15 Jahr 9 Monat; in Berlin 17 Jahr 1 Monat, und in der Schweiz 37 Jahr 1 Monat.

Die Geschlechter bieten auch in dieser Hinsicht eine bedeutende Differenz dar. Mourgues fand nach 21 jährigen Beobachtungen, daß in Montpellier die mittlere Lebensdauer von der Geburt angerechnet, wenn man beide Geschlechter zusammen nimmt, 26 Jahr 3 Monat 20 Tage beträgt; trennt man sie aber, so ist die der Personen männlichen Geschlechts 24 Jahr, 3 Monat, 15 Tage, und die der Frauen 28 Jahr, 3 Monat, 28 Tage.**)

Erst, nachdem man den Gefahren der ersten Kindheit entronnen ist, gelangt man zu der größten Lebenshoffnung. Das Alter, dem diese Hoffnung entspricht, oder von welchem an gerechnet die mittlere Lebensdauer die größte ist, ist nach den verschiednen Orten verschieden, und zeigt so die Epoche des Lebens, die das Land oder andere charakteristische Umstände der Tabelle am meisten begünstigen. In Frankreich giebt die Tabelle des Annuaire für dieses

*) Diese Formel ist aus der Théorie analytique des Probabilités p. 411 entlehnt.

**) Mémoires présentés à la première Classe de l'Institut par des Savans étrangers t. I. pag. 71—72.

Maximum 43 Jahr 5 Monat, und es fällt in das 5te Jahr das Maximum für die wahrscheinliche Lebensdauer ist darin 45 Jahr 8 Monat, und fällt 1 Jahr früher.

Die Beobachtungen über Sterblichkeit gehen nicht weit genug, daß man einigermaßen ältere Zeiten mit der gegenwärtigen vergleichen könnte. Es scheint indessen wahrscheinlich, daß die Fortschritte der Künste und Wissenschaften, indem sie die Bequemlichkeiten des Lebens vermehren, auch die mittlere Lebensdauer vermehrt haben; und Genf bietet schon einige Begebenheiten dar, die dieses bewähren. Im sechzehnten Jahrhundert betrug die mittlere Lebensdauer nicht mehr als $18\frac{1}{2}$ Jahr, im siebenzehnten Jahrhundert war sie auf $23\frac{1}{2}$ Jahr gestiegen, und im achtzehnten Jahrhundert ist sie auf $32\frac{1}{5}$ Jahr angewachsen. Dasselbe ist bei der wahrscheinlichen Lebensdauer der Fall (§. 104.), sie betrug im 16ten Jahrhundert nur $4\frac{3}{4}$ Jahr, im 17ten $11\frac{2}{3}$ Jahr, und übersteigt im 18ten Jahrhundert 27 Jahr.*)

§. 109.

Die Sterblichkeitstabelle dient auch noch, die Art zu bestimmen, wie die Bevölkerung nach dem verschiedenen Alter zusammengesetzt ist. Nimmt man dabei immer an, daß die Bevölkerung im Beharrungszustande sey, nämlich daß die Zahl der jährlichen Geburten beinahe der der Todesfälle gleich sey, und beständig, so ist es hinreichend, um die Zahl der von einem gegebenen Alter existirenden Individuen zu finden, wenn man zu dem Jahre zurückgeht, wo die Individuen dieses Alters geboren wurden, und

*) Man sehe die in der Bibliothique britannique t. IV. p. 328 enthaltene Abhandlung von Hodier. Diese Facta sind auch von Malthus in seinem Werke über das Princip der Population angeführt.

nach der Sterblichkeitstabelle berechnet, wieviel bei dem ersten Zeitraume noch übrig von ihnen sind; und dieses ist die gesuchte Zahl.

Nimmt man die Zahl der in der Tabelle bemerkten Geburten für die der jährlichen Geburten an, und addirt die sämmtlichen Zahlen dieser Tabelle, so erhält man den Betrag der Bevölkerung, der den Geburten und der durch sie vorgestellten Sterblichkeitsordnung entspricht. Zieht man ferner nach und nach von dieser Summe die Zahl der Geburten, die der Individuen von 1 Jahr, von 2 Jahr ꝛc. ab, so drückt der Rest die Zahl der Individuen aus, von 1 Jahr, 2 Jahren ꝛc. an, bis zu dem höchsten Alter. Auf diese Art ist die in dem Annuaire eingerückte Tabelle unter dem Tittel „Gesetz der Population“ in Frankreich eingerichtet. Mehrerer Genauigkeit wegen, nimmt man nach der im vorhergehenden §. gemachte Bemerkung, anstatt der für jedes Jahr angegebnen Zahlen, das Mittel zwischen 2 aufeinander folgenden Jahren, um so die Todesfälle auf das halbe Jahr, das der mittlere Zeitraum ist, zu reduciren.

Dieses Zertheilen der Bevölkerung nach dem Alter ist vielleicht das wichtigste in Betracht zu ziehende Resultat, bey der Schätzung des Wohlstandes eines Staats, da, wie Malthus bewiesen zu haben scheint, die Zahl der Geburten, die sich sehr vermehrt, sobald in der Population eine Lücke entsteht, so wie nach zerstörenden Seichen, nicht geeignet ist, um von den Fortschritten der Bevölkerung und ihrer reellen Kraft zu urtheilen. In Wahrheit befindet sich diese letztere bei der Zahl der Individuen, die in ihrem besten Alter sind, und deren Kräfte sich so weit entwickelt haben, als es der Zustand der Civilisation in Verbindung mit einer guten Vertheilung der Mittel zur Existenz erlaubt. Eine Nation, die hierin einen Vorzug hat, ist immer einer andern überlegen, bei der mehr Kinder geboren werden, bei welcher der sehr vielfältige Verlust sich auch sehr leicht ersetzt, die aber durch diese frühe Zerstörung in

Verhältniß weniger Subjecte von reiferem Alter haben wird. Ein Wachsthum in diesem Theile der Bevölkerung ist nur eine Last für den Staat.

§. 110.

Die verschiednen Aufgaben, von welchen die Auflösung in den vorhergehenden §. §. unter der Voraussetzung angegeben ist, daß die Bevölkerung im Beharrungszustande sey, sind von Euler mit Berücksichtigung der Veränderungen behandelt worden, die sich aus der Differenz der Zahl der Geburten und der der Todesfälle ergeben*). Ich will zeugen, wie einige seiner Formeln erhalten werden, sowohl um die §. 107. aufgestellten Grundsätze zu bestätigen, als auch um einen Begriff von dieser Art Untersuchungen zu geben.

Es sey P die Bevölkerung für eine gegebene Zeit, N die Zahl der Geburten, und M die der Sterbefälle, P′, N′, M′, P″ ꝛc. die analogen Zahlen für die folgenden Jahre, und man setze

$$\frac{P}{N} = n, \ \frac{P}{M} = m \text{**)}, \text{ so ist}$$

$$P = nN = mM; \text{ daher } M = \frac{nN}{m},$$

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften Jahrg. 1760. p. 144.

**) Man nennt $\frac{1}{n}$ das Maas der Fruchtbarkeit und $\frac{1}{m}$ das Maaß der Sterblichkeit. Die Bevölkerung nimmt zu, wenn $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, im Gegentheil nimmt sie ab, und sie ist im Beharrungszustande, wenn $\frac{1}{n} = \frac{1}{m}$, also wenn $m = n$. U.

$$P' = P + N - M = P + N \left\{1 - \frac{n}{m}\right\} = P + P\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right\}$$

$$= P\left\{1 - \frac{m-n}{mn}\right\}.$$

Nimmt man die Verhältnisse m und n als unveränderlich an, so erhält man auf gleiche Art

$$P'' = P'\left\{1 + \frac{m-n}{mn}\right\} = P\left\{1 + \frac{m-n}{mn}\right\}^2 \text{ ꝛc.}$$

und die Bevölkerung nimmt zu oder ab, nachdem $m > n$ oder $m < n$.

Setzt man der Kürze wegen $1 + \frac{m-n}{mn} = q$, und in den Gleichungen

$$P' = nN',\ P'' = nN'' \text{ ꝛc.}$$

für P′, P″ ꝛc. ihre Werthe Pq, Pq^2 ꝛc.

so sind, wenn man statt P seinen Werth nN nimmt, alle auf diese Art gebildeten Gleichungen durch n theilbar und geben daher

$$N' = Nq;\ N'' = Nq^2 \text{ ꝛc.}$$

auf gleiche Art erhält man

$$M' = Mq,\ M'' = Mq^2 \text{ ꝛc.}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich, daß bei der angenommenen Hypothese die Bevölkerung, die jährliche Zahl der Geburten und die der Todesfälle, sämmtlich geometrischen Progressionen mit demselben Exponenten folgen. Es ist daher hinreichend, durch Beobachtung zwei aufeinander folgende Glieder einer dieser Progressionen zu kennen, um den Exponenten zu finden; und nichts ist alsdenn leichter, als

anzumitteln, in wie viel Jahren die Bevölkerung zu einem gegebenen Verhältnisse anwachsen wird.

Es möge s dieses Verhältniß bezeichnen, und r die Anzahl Jahre, die von der Epoche, wo P die Bevölkerung ist, verfließen, so erhält man die Gleichung.

$$Pq^r = sP \text{ oder } q^r = s;$$

und bedient man sich der Logorithmen, so ist

$$r = \text{Log. } \frac{s}{q}.$$

Die Schnelligkeit, mit welcher die Bevölkerung sich vermehrt, hängt größtentheils von dem freien und urbaren Raum ab, auf welchen sie sich ausdehnen kann, und von der Vermehrung der Nahrungsmittel. Die vereinten Staaten von Amerika, die beide Vortheile vereinigen, scheinen ihre Bevölkerung in 25 Jahren zu verdoppeln. Man hat Grund zu glauben, daß dieses Wachsthum in dem günstigsten Falle in 15 Jahren statt haben könne. *)

---

*) Soll die Bevölkerung in 15 Jahren sich verdoppeln, so muß $q = 1{,}0473$ seyn, und es ist alsdenn, weil

$$q = 1 + \frac{m - n}{mn}$$

$$m = \frac{n}{1 - 0{,}0473 \cdot n}$$

und m wird unendlich sobald

$1 - 0{,}0473 \cdot n = 0$ also $n = 21{,}14$, da nun

$m = \frac{P}{M'}$, so muß in diesem Falle $M = 0$, und folglich dürfte Niemand sterben, wenn bei dem Maaße der Fruchtbarkeit $= \frac{1}{21{,}14}$ die Bevölkerung in 15 Jahren sich verdoppeln soll. Ist $n > 21{,}14$ . . . so wird m negativ, und dieses zeigt an, daß wenn die jährlichen Geburten weniger als den 21sten Theil der ganzen Bevölkerung betragen, die Verdopplung der

§. 111.

Mittelst der im vorigen §. erhaltenen Relationen findet man leicht das Gesetz der Sterblichkeit, wenn man N, q, M, und wie diese letztere Zahl nach dem verschiednen Alter zusammengesetzt ist, nämlich wenn man die Zahl der Todesfälle von jedem Alter für die gegebne Epoche kennt. Bezeichnet man durch

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \text{etc.}$$

das Verhältniß zwischen der Zahl der Individuen von 1, 2, 3 ꝛc. Jahren und der Zahl der Geburten, und durch

$$M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad M_3\quad \text{etc.}$$

die Zahl der Todesfälle vor dem 1ten, 2ten, 3ten ꝛc. Jahre, so erhält man zuerst

$$v_1 = \frac{N - M_0}{N};\ \text{daher}\ M_0 = N\,(1 - v_1).$$

Geht man zu dem Jahre zurück, das der Epoche von P, N, M (§. 110.) vorhergeht, so wird man $\frac{N}{q}$ für die Zahl der Geburten finden, woraus die Kinder von 2 Jahr sich ergeben; nach dem Gesetz der Sterblichkeit mußte diese Zahl sich auf $\frac{N}{q}v_1$, im ersten Jahre reduciren, und im zweiten Jahre $\frac{N}{q}v_2$ werden, man erhält daher für die Sterblichkeit zwischen dem ersten und 2ten Jahre

---

Population in 15 Jahren nur noch in dem Falle statt finden kann, wenn jährlich mehr Fremde einwandern, als der Tod Personen hinwegrafft. U.

$$M_1 = \frac{N}{q} v_1 - \frac{N}{q} v_2 = \frac{N}{q} (v_1 - v_2).$$

Geht man 2 Jahre vor der gegebnen Epoche zurück, um zu der Geburt der Kinder von 3 Jahren zu kommen, so ist die den Geburten entsprechende Zahl $\frac{N}{q^2}$, sie reducirt sich im 2ten Jahre auf $\frac{N}{q^2} v_2$, und auf $\frac{N}{q^2} v_3$ im 3ten Jahre; daher die Sterblichkeit zwischen dem zweyten und 3ten Jahre $\frac{N}{q^2} (v_2 - v_3)$ und folglich

$$M_2 = \frac{N}{q^2} (v_2 - v_3).$$

Fährt man so fort, so findet man immer Gleichungen von derselben Form, aus welchen man nach und nach erhält

$$v_1 = 1 - \frac{M_0}{N},$$

$$v_2 = v_1 - \frac{M_1 q}{N} = 1 - \frac{M_0 + M_1 q}{N}$$

$$v_3 = v_2 - \frac{M_2 q^2}{N} = 1 - \frac{M_0 + M_1 q + M_2 q^2}{N}$$

$$v_4 = v_3 - \frac{M_2 q^3}{N} = 1 - \frac{M_0 + M_1 q + M_2 q^2 + M_3 q^3}{N}$$

rc.

wenn $q = 1$ ist, so erhält man $M = N$, und obige Ausdrücke reduciren sich auf

$$N v_1 = M - M_0,$$

$$N v_2 = M - M_0 - M_1,$$

$$N v_3 = M - M_0 - M_1 - M_2,$$

$$N v_4 = M - M_0 - M_1 - M_2 - M_3, \text{ rc.}$$

nämlich die Sterblichkeitstabelle läßt sich aus der Zahl der Gestorbenen, nach dem Alter vertheilt, eben so ableiten, wie es §. 102. angegeben ist.

§. 112.

Wenn das Gesetz der Sterblichkeit bekannt ist, so läßt sich auf gleiche Art das der Bevölkerung bestimmen, wenn man zu den frühern Geburten vor der Epoche von P zurückgeht, und jede dieser Zahlen nach den verflossenen Jahren reducirt. Nimmt man 100 für das Ziel des Lebens, so erhält man für die Jahre

$$1, 2, 3, \ldots\ldots 100$$

die Zahl der Individuen

$$N, \frac{N}{q} v_1, \frac{N}{q^2} v_2, \frac{N}{q^3} v_3 \ldots\ldots \frac{N}{q^{100}} v_{100}$$

und folglich

$$P = N + \frac{N}{q} v_1 + \frac{N}{q^2} v_2 \ldots + \frac{N}{q^{100}} v_{100};$$

daher

$$\frac{P}{N} = 1 + \frac{v_1}{q} + \frac{v_2}{q_2} + \frac{v_3}{q^3} \ldots\ldots + \frac{v_{100}}{q^{100}}.$$

Wenn die Bevölkerung unveränderlich ist, so erhält man da $q = 1$, wie im §. 109.

$$P = N(1 + v_1 + v_2 - \ldots + v_{100}).$$

Substituirt man statt der Größen $1, v_1, v_2, v_3$ 2c. das Mittel zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden, nämlich

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} v_1, \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2, \ldots \frac{1}{2} v_{99} + \frac{1}{2} v_{100}, \frac{1}{2} v_{100},$

so verwandelt sich obige Formel in

$$P = N\left(\tfrac{1}{2} + v_1 + v_2 \ldots\ldots + v_{100}\right)^{*)}$$

welches die §. 109. angegebene Regel ist.

§. 113.

Halley scheint der erste gewesen zu seyn, der gezeigt hat, wie man aus einer Sterblichkeitstabelle die Wahrscheinlichkeiten für die Dauer der Existenz mehrerer Individuen, z. B. die Dauer der Ehen, folgern könne, wenn das Alter eines jeden Mittgliedes einer solchen Gesellschaft bekannt ist. Sein Verfahren hierbei ist kein anderes, als das, nach welchem die zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten gebildet werden §. 16.

Um die Anwendung hiervon auf den vorgelegten Gegenstand zu zeigen, wollen wir die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für eine 10jährige Vereinigung einer Person von 25 Jahren mit einer von 20 Jahren aufsuchen. Es kann seyn, daß sie zu Ende der 10 Jahren noch leben, oder daß nur noch einer lebt, oder daß beide gestorben sind.

---

*) Wäre das Gesetz der Sterblichkeit durch eine Formel, wie die von Lambert ausgedrückt, (§. 106.) so braucht man sich nicht daran zu binden, alle jährliche Todesfälle in dieselbe Epoche zu setzen, und könnte annehmen, daß das Absterben der Individuen während der Dauer des ganzen Jahres continuirlich geschehe; aber man müßte alsdenn Differentialien und Integralien, statt der oben angeführten Größen und Reihen einführen, wie man aus dem von Duvillard unter dem Titel Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité herausgegebenen Werke ersehen kann. Aus der ersten Tabelle dieses Werkes sind die von mir aus dem Annuaire angeführten Tabellen genommen.

Die Sterblichkeitstabelle aus dem Annuaire, auf 1000 Geburten reducirt, giebt die Wahrscheinlichkeit von 25 Jahren an noch 10 Jahr zu leben $\frac{404}{471}$, die entgegengesetzt ist $1 - \frac{404}{471} = \frac{67}{471}$; und von 20 Jahren an gerechnet $\frac{438}{502}$ wovon das Gegentheil $1 - \frac{438}{502} = \frac{64}{502}$ beträgt.

Aus diesen einfachen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich die zusammengesetzten

$\frac{404}{471} \cdot \frac{438}{502}$ daß sie noch beide leben werden;

$\frac{67}{471} \cdot \frac{438}{502}$ daß die ältere Person todt seyn wird;

$\frac{404}{471} \cdot \frac{64}{502}$ daß die jüngere todt seyn wird;

$\frac{67}{471} \cdot \frac{64}{502}$ daß beide gestorben seyn werden;

Im allgemeinen, wenn e und e′ die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, für das Leben eines jeden der Individuen, nach Verlauf der Zeit der Vereinigung, f und f′ die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten, so giebt das Produkt von

$$(e+f)(e'+f') = ee' + e'f + e'f + ff' = 1$$

$$ee',\ e'f,\ ef',\ ff'$$

als die 4 oben aufgestellten Wahrscheinlichkeiten. Will man blos die Wahrscheinlichkeit wissen, daß irgend einer der beiden Individuen noch leben wird, so hat man

$$ee' + e'f + ef' = 1 - ff'$$

was am einfachsten ist, wenn die Zahlen f und f′ die kleinern sind.

§. 114.

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann man die Sterblichkeitstabelle für jede Vereinigung besonders einrichten; setzt man dabei voraus, daß z. B. 1000 auf einmal sich

gebildet haben, und daß die einfachen Wahrscheinlichkeiten e, e′, f, f′ sich auf das erste seit dem verflossenen Jahr beziehen, so hat man zu Ende dieses Jahrs

1000 ee′ Vereinigungen die noch bestehen;

1000 e′f . . . . . wo die jüngere Person noch lebt;

1000 ef′ . . . . . wo die ältere noch lebt;

1000 ff′ . . . . . wo beide verstorben sind.

Berechnet man dieselben Zahlen für jedes Jahr, so erhält man eine Tabelle, der ähnlich, die Duvillard über die Ehen, aus den Registern der Stadt Genf angefertigt hat, *) und mit deren Hülfe man die wahrscheinliche Dauer und die mittlere Dauer der Vereinigung, eben so wie die wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer aus der Sterblichkeitstabelle der Individuen (§. 104. u. 107.) bestimmen kann.

Um seiner Tabelle von den Ehen mehr Genauigkeit zu geben, hat Duvillard e und f nach dem Gesetz der Sterblichkeit bei Männern genommen, und e′ und f′ nach dem für Frauenspersonen aber diese Vorsicht, auf die er sich, aus Mangel besserer Hülfsmittel, beschränkt, läßt noch einige Ungewißheit, denn in den gewöhnlichen Sterblichkeitstabellen sind die Todesfälle der verheuratheten Individuen mit denen der unverehelichten vermengt, und man hat Grund anzunehmen, daß die Sterblichkeitsordnung für beide Klassen nicht dieselbe sey, man müßte sie daher von einander unterscheiden. Die aus unmittelbar über Ehen angestellten Beobachtungen angefertigten Tabellen, verdienen den Vorzug vor den Zahlen, die nach obigem Verfahren gefolgert werden, und sind überdies von aller Rechnung unabhängig, die man, um die letztern zu erhalten,

*) Recherches sur les Emprunts p. 60.

anstellen muß. Dieses ist ein sehr auffallendes und einfaches Beispiel von dem, was ich §. 10. über den Vortheil der directen Beobachtungen behauptet habe. So lange man an jedem Orte nur das allgemeine Gesetz der Sterblichkeit kannte, mußte man annehmen, es stimme für beide Geschlechter beinahe überein; hat man beide Geschlechter unterschieden, so muß doch noch vorausgesetzt werden, die Sterblichkeit verheuratheter Personen sey wenig von der der unverehelichten unterschieden; aber die besondern Beobachtungen über die Dauer der Ehen und ihre Trennung sind von allen Hypothesen unabhängig, und geben unmittelbar die erforderlichen Wahrscheinlichkeiten.

§. 115.

Die Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens haben eine äußerst wichtige Anwendung bei den Streitigkeiten gefunden, die über das Einimpfen der Blattern sich erhoben haben. Es waren zwei entscheidende Aufgaben zu lösen: Erstens mußte gezeigt werden, wieviel Individuen das Einimpfen erhalten würden, um daraus die Nützlichkeit desselben für die Gesellschaft zu erkennen; und betrachtet man zweitens den Gegenstand in Beziehung zu dem persönlichen Interesse, so müßte die Gefahr, welcher das Individuum durch diese Operation nach seinem Alter und seinem Baue ausgesetzt wird, gegen die Gefahr abgewogen werden, eher an die natürlichen Blattern, als an irgend einer andern Krankheit zu sterben. Die erstere dieser Gefahren, die gegenwärtig ist, mußte der Einbildung um vieles mehr auffallen, als die zweite, die auf die ganze Dauer der Existenz vertheilt ist, und nur in der Ferne sich zeigt. Diesem Unterschiede wollte d'Alembert noch die Verschiedenheit des Werths, den die Jugendjahre in Vergleich zu dem reifern Alter haben, beifügen; aber hier verfällt man in die ungewissen Schätzun-

gen, die durchaus kein Gegenstand einer genauen Rechnung seyn können.

Man würde leicht zu genauen Bestimmungen über die eine so wie über die andere der oben aufgestellten Fragen gelangen, wenn man die Zahl der Individuen kennte, die jedes Jahr von den Blattern befallen werden, ihr Alter, die Zahl derjenigen, die daran sterben, und welches die Wahrscheinlichkeit seyn würde jedes Jahr zu sterben, wenn die Blattern nicht mehr existirten. Diese letztere Bestimmung hat man aus dem übrigen gegebenen und den gewöhnlichen Sterblichkeitstabellen gefolgert, indem man von der Gesammtzahl der Todesfälle für jedes Alter, die durch diese Seuche veranlaßten Todesfälle abzog, und den Rest durch die Zahl aller von diesem Alter existirenden Individuen theilte; aber dieses setzt, meines Erachtens, voraus, daß die durch die Blattern hingerafften Individuen in keine andere Krankheit verfallen seyn würden, wenn sie vor dieser bewahrt gewesen wären, eine Voraussetzung, die man nicht wohl annehmen kann. Es möchte wohl genauer seyn, die durch andere Krankheiten veranlaßten Todesfälle nicht mit der Gesammtzahl der von dem in Rede stehenden Alter existirenden Individuen, sondern mit der Zahl dieser Individuen um diejenigen vermindert, die an die Blattern gestorben sind, zu vergleichen, obgleich auch hieraus noch nicht die Art und Weise in Rechnung gezogen ist, wie diese letztern Individuen absterben würden, wenn sie von den Blattern befreit wären. Um diese Einwürfe zu vermeiden, müßte man unmittelbar diese Sterblichkeit bei Individuen bestimmen, die von dem Einflusse der Seuche befreit sind. Wählt man hierzu diejenigen, die die Blattern schon gehabt, so könnte man doch noch befürchten, daß diese Krankheit in der Beschaffenheit des Körpers eine Veränderung bewirkt habe, wodurch die Sterblichkeitsordnung nicht dieselbe bleibt, die sie bei auf jede andere Art von dieser Krankheit befreiten Individuen ist; aber es sey auch mit diesen Schwierigkeiten wie es wolle, so nehmen

doch die Resultate immer denselben Gang, und ich habe sie nur angeführt, um zu zeigen, wie mißlich dieser Gegenstand ist. Ich komme auf das oben angezeigte gegebene zurück.

N sey immer die Zahl der jährlichen Geburten, und ich werde durch v', v'', v''' ꝛc. die Zahl der Individuen, die von 1, 2, 3 Jahren existiren, durch α, α', α'', α''' ꝛc. diejenigen, die vor dem 1, 2, 3 ꝛc. Jahr von den Blattern befallen werden, und durch μ, μ', μ'', μ''' diejenigen, die daran sterben, bezeichnen. Die durch andere Krankheiten veranlaßten Todesfälle werden daher seyn

von 0 bis 1 Jahr $N - v' - \mu$,
„ 1 bis 2 „ $v' - v'' - \mu'$,
„ 2 bis 3 „ $v'' - v''' - \mu''$, ꝛc.

Die Wahrscheinlichkeiten an diesen Krankheiten zu sterben, sind nach der ersten Hypothese

$$\frac{N - v' - \mu}{N}, \quad \frac{v' - v'' - \mu'}{v'}, \quad \frac{v'' - v''' - \mu''}{v''},$$

und nach der zweiten

$$\frac{N - v' - \mu}{N - \mu}, \quad \frac{v' - v'' - \mu'}{v' - \mu'}, \quad \frac{v'' - v''' - \mu''}{v'' - \mu''}, \text{ ꝛc.}$$

Im allgemeinen mögen sie aus diesen Ausdrücken abgeleitet seyn, oder aus den vorhergehenden, oder auf jede andere Art, so wollen wir sie durch m, m', m'', m''' ꝛc. bezeichnen; nachdem die Blattern ausgerottet sind, geben eine Anzahl von N Geburten $N(1 - m)$ Kinder von einem Jahre, $N(1 - m)(1 - m')$ Kinder von 2 Jahren ꝛc., Zahlen, welche die Sterblichkeitstabelle, die diesen Umständen entspricht, bilden; und vergleicht man sie mit der Reihe der Zahlen N, v', v'', v''' ꝛc., so kann man hieraus die Zahl der Individuen ableiten, die von jedem

Alter erhalten werden, die durch sie gewonnene Vermehrung der mittlern Lebensdauer insbesondere, und die, welche für alle Individuen hieraus sich ergiebt. Kennt man überdies das Verhältniß der Zahl der jährlichen Ehen zu der Anzahl der mannbaren Individuen, und das Verhältniß der Zahl der Ehen zu der der Geburten, so erhält man den Anwachs bei den Geburten, der durch die erhaltenen Individuen hervorgebracht wird; und dieses ist der Gewinn für die Bevölkerung; damit er aber wirklich statt habe, ist erforderlich, daß auch die Leichtigkeit zu subsistiren in demselben Verhältnisse wachse.

§. 116.

In den gegenwärtigen Umständen bekommen α Individuen die Blattern von 0 bis 1 Jahr und μ sterben daran, hieraus folgt für das erste Jahr die Wahrscheinlichkeit $\frac{\alpha}{N}$ die Blattern zu bekommen $\frac{\alpha}{N} \times \frac{\mu}{\alpha} = \frac{\mu}{N}$ daran zu sterben und $\frac{N-\alpha}{N}$ nicht von ihnen befallen zu werden.

Von $N-\alpha$ Individuen, die sie im ersten Jahre nicht gehabt haben, bleiben wegen der durch andere Krankheiten verursachten Sterblichkeit nur noch $(N-\alpha)(1-m)$ und unter diesen bekommen α' die Blattern im zweiten Jahre, wovon μ' sterben; daher erhält man für das zweite Jahr die Wahrscheinlichkeiten $\frac{\alpha'}{(N-\alpha)(1-m)}$ die Blattern zu bekommen $\frac{\mu'}{(N-\alpha)(1-m)}$ daran zu sterben, und $1-\frac{\alpha'}{(N-\alpha)(1-m)}$ davon befreit zu bleiben. Die Zahl der Individuen, die von den Blattern nicht befallen

sind, und die $(N-\alpha)(1-m)-\alpha'$ beträgt, reducirt sich durch andere Krankheiten auf $((N-\alpha)(1-m)-\alpha')(1-m')$ vom 2ten bis zum 3ten Jahre. Fährt man so fort, so kann man die jedem Jahre entsprechenden Wahrscheinlichkeiten auf gleiche Art folgern.

Bezeichnet man der Kürze wegen mit s', s'', s''' ꝛc. die Zahl der Individuen, die zu Anfang eines jeden Jahres noch nicht von den Blattern befallen worden sind, so sind die Wahrscheinlichkeiten daran im 1ten, 2ten, 3ten ꝛc. Jahre zu sterben.

$$\frac{\mu}{N}, \frac{\mu'}{s'}, \frac{\mu''}{s''} \text{ ꝛc.};$$

die Wahrscheinlichkeiten von der Zahl der Individuen zu seyn, die zu Anfang des 1ten, 2ten, 3ten ꝛc. Jahres noch nicht davon befallen worden sind

$$\frac{s'}{N}, \frac{s''}{s'}, \frac{s'''}{s''} \text{ ꝛc.};$$

woraus die Wahrscheinlichkeiten im 1ten, 2ten, 3ten ꝛc. Jahre daran zu sterben, wenn man von der Geburt an rechnet, sich ergeben.

$$\frac{s'}{N} \cdot \frac{\mu'}{s'} = \frac{\mu'}{N}, \frac{\mu''}{N}, \frac{\mu'''}{N} \text{ ꝛc.}$$

und von 1 Jahr angerechnet

$$\frac{\mu'}{s'}, \frac{\mu''}{s'}, \frac{\mu'''}{s'} \text{ ꝛc.}$$

Resultate, die man auf alle Jahre anwenden kann, wenn man die Größen s und μ nach der Zahl der Jahre accentuirt. Die Summe

$$\frac{\mu' + \mu'' + \mu''' + \ldots}{s'}$$

dieser Wahrscheinlichkeiten, bis zu der längsten Lebensdauer fortgesetzt, giebt die Gefahr an den Blattern zu sterben, in Beziehung zu dem Jahre, von dem man ausgegangen ist. Diese Gefahr ist es, die man mit der vergleichen muß, an eingeimpften Blattern zu sterben, um den Vortheil zu würdigen, den das Einimpfen denjenigen Individuen gewährt, die sich ihm unterwerfen.

§. 117.

Aus diesen Rechnungen ließ sich leicht die Zahl der Individuen von einem jeden Alter ableiten, die, ohne die Blattern gehabt zu haben, sterben, ihre mittlere Lebensdauer und mehrere andere Folgerungen, die Duvillard in dem von ihm angeführten Werke entwickelt hat, deren Auseinandersetzung aber nicht in meinen Plan gehört.

Daniel Bernoulli ergänzte durch seinen ungemeinen Scharfsinn die obigen Facta, die ihm fehlten, dadurch, daß er auf 2 Hypothesen sich stützte, die übrigens die Erfahrung nicht bewährt hat; nämlich die Gefahr von den Blattern befallen zu werden, sey für jedes Alter dieselbe, so wie auch die Gefahr daran zu sterben;*) aber der Vortheil war außerdem so bedeutend, daß er noch sehr augenscheinlich blieb des Fehlers ungeachtet, den Duvillard mit Hülfe vielfacher Beobachtungen, die er später über die Bernoullische Abhandlung anstellte, gänzlich vermied. Folgendes sind einige der vorzüglichsten Resultate, die er erhalten hat.

Man findet Seite 142 u. f. seines Werkes: 1) daß in dem natürlichen Zustande unter 1000000 Kinder 85685 früher oder später an den Blattern sterben, und daß ihre mittlere Lebensdauer 3,9 Jahr beträgt; 2) daß wenn diese Krankheit nicht mehr statt hätte, ihre mittlere Lebensdauer

---

*) Mémoires de l'Academie des Sciences de Paris 1760.

44,7 Jahre betragen würde, und daß in diesem Zustande, den der Autor l'état non variolique nennt, die mittlere Lebensdauer aller Individuen 32¼ Jahr anstatt 28¾ (§. 108.) seyn würde, die Bevölkerung, die für 1000000 Geburten, 28763000 Individuen beträgt, würde auf 32256000 sich belaufen. Dieses wären die Wirkungen des Impfens, wenn die Anwendung allgemein würde. Und wer könnte verhindern, daß sie es nicht werde, da sie so außerordentlich leicht ist, auch nicht die geringste Gefahr darbietet, und die Zahl der directen und indirecten Versuche, denen man sie schon unterworfen hat, ihren Nutzen durch eine Wahrscheinlichkeit bewähren, die der Einheit sehr nahe kömmt, und durch die einfachsten Rechnungen geschätzt werden kann?

§. 118.

Nicht blos über die Blattern haben die Aerzte Beobachtungstabellen angefertigt; Man hat schon einige Werke, in welchen diese Methode die einzige, die wirklich demonstrativ ist, befolgt worden; da die Arzneikunde größtentheils nur aus Facta besteht, die unmittelbar von Beobachtungen abgeleitet sind, die allein die Wirkung der als gut erkannten specifischen Mittel bemerkbar gemacht und bewährt hat. Die Kräfte der Natur verbinden sich auf so verschiedne Arten mit den verschiednen Heilmethoden, daß vielleicht keine dieser Methoden, wenigstens scheinbar, ganz von allem Erfolge entblößt ist. Durch Vergleichung der Menge dieser Erfolge mit der Gesammtzahl der nach jeder Methode behandelten Krankheiten, und der der Natur überlassenen (wenn dieser letztere Fall statt haben kann) also, muß man das Verdienst dieser Methoden würdigen, und die ohne Unterlaß erneuerten Einwürfe gegen die Medicin beantworten. Pinel und mehrere andere Aerzte haben die Resultate bekannt gemacht, die in Irrenhäusern erhalten wor-

den sind. Im Jahre 1789 hat William Black, ein englischer Arzt, eine arithmetische und medicinische Analyse der Krankheiten und der Sterblichkeit des Menschengeschlechts (An arithmetical and medical Analysis etc.) bekannt gemacht. Durch die Fortsetzung und weitere Ausdehnung einer ähnlichen Arbeit kann man unveränderlich festsetzen, ob die Arzneikunde wirkliche Fortschritte gemacht hat. Die Hospitäler, zahlreicher nnd bei weitem besser eingerichtet als im vorigen Jahrhundert, erleichtern dieses Unternehmen ungemein. *)

---

*) Man hat den phylosophischen Geist, d. h. die auf alles, was für die Gesellschaft Interesse hat, angewandte Vernunft so sehr verläumdet, daß es wohl erlaubt seyn mag, alle die sichern Facta in das Gedächtniß zurück zu rufen, die zu Gunsten derselben sind. Eins der auffallendsten ist die Verbesserung des Schicksals der Kranken in den Hospitälern, die wir den Bemühungen von Menschen verdanken, von denen hinlänglich bekannt ist, daß sie nur durch reine Menschenliebe hierzu bewegt wurden. Ihrer Vorsorge verdanken wir es, daß, und zwar in einer ungünstigen Zeit, das Anhäufen der Kranken in einem Bette in dem Hôtel-Dieu aufhörte, daß die Maaßregeln genommen wurden, um die ungemeine Sterblichkeit der Findelkinder zu vermindern, daß man eigne Entbindungs- und Säuganstalten bildete, so wie mehrere andere Einrichtungen, die hier aufzuzählen viel zu weitläufig seyn würde. In diesem so gerühmten 17ten Jahrhundert war die Sterblichkeit im Hôtel-Dieu in Paris den Fremden ein Aergerniß, es kamen daselbst mehr als 3000 Kranke jährlich, aus Mangel an Vorsorge um. (Siehe Essay tending to prove that in the Hospital called l'Hôtel-Dieu at Paris, thére die above 3000 per annum, by reason of ill accommodation (1687), Politicals Essays, by William Petty 1755 p. 63.) Religiöser Eifer kann ohne Zweifel wie das Mitleiden die Hülfsmittel verschwenden, nur die Vernunft spendet sie mit Unpartheilichkeit, indem sie die Einrichtungen mit Ordnung vornimmt, und weiß so der größten Anzahl Individuen einen Antheil von Wohlseyn

Von Leibrenten und Assekuranzen auf das Leben und auf Sachen.

§. 119.

Die Wahrscheinlichkeiten der Dauer des menschlichen Lebens, verbunden mit dem Anwachsen der Kapitalien, die auf zusammengesetzten Zinsen ausstehen, haben zu den Leibrenten, den Assekuranzen auf das Leben, zu den Sparkassen und überhaupt zu allen den Speculationen Veranlassung gegeben, wodurch man sich entweder für die Gegenwart oder für die Zukunft pecuniäre Vortheile verschafft, die von den Zufällen der Sterblichkeit abhängen. Die Wichtigkeit dieser Theorien hat die Fragen über dieselbe vervielfacht, und eine Menge Schriftsteller sie zu behandeln veranlaßt. Man darf daher hier nur die nöthige Anweisung erwarten, wie Wahrscheinlichkeitsrechnung dabei angewendet wird, und dazu ist die Auflösung der einfachsten Aufgaben hinreichend.

Wir wollen zuvörderst jedes der in der Sterblichkeitstabelle enthaltenen v Individuen von einem gegebenen Alter, als Eigenthümer einer Leibrente s ansehen, also als solche, von welchen jeder sein ganzes Leben hindurch diese Summe jährlich empfängt; so wird derjenige, der diese Renten ausbezahlen muß, und den ich den Banquier nennen will, zu Ende des ersten Jahres die Summe v's zu zahlen haben, zu Ende des zweiten Jahres v''s, zu Ende des 3ten v'''s u. s. f., wo v', v'', v''' rc. die Zahl der Individuen bezeichnen, die zu Ende eines jeden Jahres noch leben. Bedeutet nun t den gesetzlichen Zinsfuß,*)

---

zu verschaffen, und bereitet in der Gegenwart Hülfsmittel für die Zukunft.

*) t soll eigentlich den Theil ausdrücken, den die jährlichen Interessen von dem Kapitale betragen. So ist bei 5 p. C. $t = \frac{1}{20} = 0{,}05$ rc.

U.

so sind die Werthe dieser Summen zu Anfang des ersten Jahres (nach der zusammengesetzten Rabattrechnung) verhältnißmäßig

$$\frac{v's}{1+t},\ \frac{v''s}{(1+t)^2},\ \frac{v'''s}{(1+t)^3}\ \text{ꝛc.}$$

und so fort, so weit die Sterblichkeitstabelle geht. Summirt man alles, so erhält man den Gesammtwerth dessen, was die zu Anfang des ersten Zeitraums existirenden Personen haben zahlen müssen, um diese Rente zu erlangen; jeder hat daher für seinen Theil zahlen müssen

$$\frac{1}{v}\left\{\frac{v's}{1+t}+\frac{v''s}{(1+t)^2}+\frac{v'''s}{(1+t)^3}+\text{ꝛc.}\right\}=$$

$$\frac{s}{v}\left\{\frac{v'}{1+t}+\frac{v''}{(1+t)^2}+\frac{v'''}{(1+t)^3}+\text{ꝛc.}\right\}=S$$

Die Summe S ist das Kapital der Leibrente s, und ist auch der mittlere Werth der Summen, die der Banquier zahlt, auf alle Individuen der Tabelle vertheilt, so zwar daß er weder Verlust noch Gewinn hat, wenn die Rentenirer genau nach den in der Sterblichkeitstabelle enthaltenen Zahlen absterben.

Die Formel der mathematischen Hoffnung giebt denselben Werth für S, wobei man nur einen Rententirer zu berücksichtigen braucht; denn da die ungewissen Summen auf den ersten Zeitpunct reducirt

$$\frac{s}{1+t},\ \frac{s}{(1+t)^2},\ \frac{s}{(1+t)^3}\ \text{ꝛc.}$$

betragen, und die Wahrscheinlichkeiten, daß der Rententirer noch zu Ende von

1, 2, 3, ꝛc.

Jahren existiren wird,

$$\frac{v'}{v}, \frac{v''}{v}, \frac{v'''}{v}$$

sind, so ist seine mathematische Hoffnung

$$\frac{v'}{v} \cdot \frac{s}{1+t} + \frac{v''}{v} \frac{s}{(1+t)^2} + \frac{v'''}{v} \cdot \frac{s}{(1+t)^3} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{s}{v} \left\{ \frac{v'}{1+t} + \frac{v''}{(1+t)^2} + \frac{v'''}{(1+t)^3} + \text{ꝛc.} \right\}$$

derselbe Werth, der oben für S gefunden worden ist.

§. 120.

Diese beiden Arten die Aufgabe auf eine Gleichung zu bringen, erinnern an die Betrachtungen §. 78. und zeigen, wie der Zustand dessen, der eine einzige Leibrente bezahlt, von dem eines Banquiers verschieden ist, der eine beträchtliche Anzahl Renten auszahlt, damit ihre Sterblichkeit nach der Ordnung erfolge, die in der Sterblichkeitstabelle angegeben ist. Die erstere Unternehmung ist sehr gewagt, die andere im Gegentheil ist es wenig, wenn anders die Tafel nach der Classe der Individuen die die Rente beziehen, angefertigt oder ausgesucht ist. Wenn eine öffentliche Anleihe auf Leibrenten gemacht werden soll, so muß man sich wohl vorsehn, für eine große Stadt nicht ihre allgemeine Sterblichkeitsordnung in Anwendung zu bringen. Denn es interessiren sich fast nur ausgesuchte Individuen für ein solches Anleihen, auch fallen sie dem Staate sehr zur Last, wenn er für jeden Kopf, nämlich für jedes beliebige Alter, die Rente nach einem und demselben Zinsfuße auszahlt, wie in Frankreich 1780, wo folgende Speculation hierdurch veranlaßt wurde.

Einige Banquier, die den Vortheil bemerkten, welchen die Weiber in Genf hinsichtlich der mittlern Lebensdauer

über die Männer hatten, ließen durch Aerzte eine gewisse Anzahl derselben aussuchen, die schon die Blattern und Masern überstanden hatten, deren Leibesbeschaffenheit die beste schien, und über deren Lebenswandel sie wachen konnten; auf diese Köpfe nun legten sie ihre Gelder aus, die sie in ein einziges, durch Uebereinkunft unter sich, in Aktien getheiltes Kapital zusammen thaten, um so eine große Anzahl Personen mit in ihre Speculation ziehen zu können. Da sie nun 9 pC. Zinsen erhielten, so konnten sie 7 pC. abgeben, welches über die gesetzlichen Zinsen war, und da die 2 pC., die ihnen übrig blieben, auf zusammengesetzte Zinsen ausstanden, so mußten sie zu 5 pC. gerechnet in 26 Jahren dem Kapitale gleich werden. Nun übersteigt aber die wahrscheinliche Lebensdauer der Weiber in Genf bei weitem diesen Zeitraum, da sie sich auf 40 Jahr ausdehnt, und da ferner dieses nur die mittlere Lebensdauer der Weiber überhaupt von allen Ständen zusammen genommen ist; so hat man hinlänglich Ursache zu glauben, daß die Lebensdauer der Personen, die von den Banquiers ausgesucht wurden, viel bedeutender gewesen sey, und so nach wird man sich nicht weit von der Wahrheit entfernen, wenn man für ihren Gewinn die Summe annimmt, zu welcher das Kapital nach Verlauf von 40 Jahren anwächst, und nach dieser Zeit übersteigt es seinen zweifachen Werth.

Dieses ist nur ein flüchtiger Ueberblick, denn um die Größe des wirklichen Verlustes für den Anleiher im gegenwärtigen Falle zu finden, müßte man mit Genauigkeit die Sterblichkeitsordnung der Individuen jener Klasse kennen, und daraus berechnen, welches der gesetzliche Zinsfuß seyn müßte, damit 9 pC. Leibrenten bezahlt werden könnte. Die Auflösung dieser Aufgabe hängt von der Gleichung §. 119. ab; das Gegebene wäre v, v', v'', v''' ꝛc. und man erhält $s = \frac{9S}{100}$, wo S als gemeinschaftlicher Factor beider Glieder der Gleichung verschwindet, und

Hieraus folgt

$$1 = \frac{9}{100v} \left\{ \frac{v'}{1+t} + \frac{v''}{(1+t)^2} + \frac{v'''}{(1+t)^3} + \text{ꝛc.} \right\}$$

eine Gleichung, aus welcher der Werth von t gesucht werden müßte, was nur durch ungemein mühsames Suchen geschehen kann, wenn man nicht schon eine große Menge nach verschiednen Sterblichkeiten und Zinsfüßen angefertigte Tabellen hätte.

§. 121.

Es ist leicht einzusehen, daß ganz einfache arithmetische Mittel hinreichen, um den Werth von S zu berechnen und die Aufgabe direct zu lösen, selbst wenn man einen Umstand beachtet, den ich mehrerer Einfachheit wegen außer Acht gelassen habe. Ich habe bei Construction der Formel §. 119. angenommen, daß die Todesfälle der Rentenirer sämmtlich zu Ende eines jeden Jahres statt haben; da dieses aber nicht so ist, und den Erben ein verhältnißmäßiger Theil der Rente für die Zeit gut gethan wird, die der Rentenirer noch gelebt hat, so muß man, um diese Differenz auszugleichen $\frac{1}{2}(v+v')$ statt v', $\frac{1}{2}(v'+v'')$ statt v' ꝛc. substituiren. Wenn man ein stetiges Gesetz des Absterbens einführen wollte, so müßte man statt der Zahlen v', v'', v''' . . . . einen allgemeinen Ausdruck des Gesetzes der Sterblichkeit §. 106. einführen, und zur Integralrechnung seine Zuflucht nehmen. (Siehe Note III.)

Meistens beschränkt man sich, um die Rechnung abzukürzen, auf die Perioden, während welcher es erlaubt seyn kann, die jährliche Anzahl der Todesfälle als constant anzunehmen. Bezeichnet man diese Zahl durch m, so wird

$$v' = v - m, \quad v'' = v - 2m, \quad v''' = v - 3m, \text{ ꝛc.}$$

wodurch der Werth von S sich verwandelt in

$$S' = \frac{s}{v}\left\{\frac{v-m}{1+t} + \frac{v-2m}{(1+t)^2} + \frac{v-3m}{(1+t)^3} + \text{etc.}\right\}$$

Dieser Ausdruck läßt sich in folgende beide zerlegen

$$\frac{s}{1+t}\left\{1 + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \ldots\ldots + \frac{1}{(1+t)^{n-1}}\right\}$$

$$-\frac{sm}{v(1+t)}\left\{1 + \frac{2}{1+t} + \frac{3}{(1+t)^2} \ldots + \frac{n}{(1+t)^{n-1}}\right\}$$

wo n die Anzahl der Jahre bezeichnet, aus welchen die Periode besteht. Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{1+t} = q$ so wird die erste Reihe, die eine geometrische Progression ist,

$$qs(1 + q + q^2 \ldots\ldots + q^{n-1}) = qs\,\frac{1-q^n}{1-q};$$

und die zweite verwandelt sich in

$$-\frac{qsm}{v}(1 + 2q + 3q^2 \ldots\ldots + nq^{n-1})$$

Setzt man

$$1 + 2q + 3q^2 \ldots\ldots\ldots + nq^{n-1} = ſ$$

und multiplicirt beide Glieder dieser Gleichung mit q, so daß sie

$$q + 2q^2 + 3q^3 \ldots\ldots + nq^n = qſ$$

wird; addirt zu dem Gliede links die geometrische Progression

$$1 + q + q^2 + q^3 \ldots\ldots + q^n$$

und zu dem Gliede rechts $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ als die Summe dieser Progression, so erhält man

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 \ldots\ldots + (n+1)q^n =$$
$$sq + \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

Bedenkt man ferner daß

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 \ldots\ldots + (n+1)q^n = s + (n+1)q^n,$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$s + (n+1)q^n = sq + \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

aus welcher folgt

$$s = \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^n}{1-q} \text{ *)}$$

Mittelst dieser letztern Summe und der erstern Reihe, erhält man endlich

$$S' = \frac{qs(1-q^n)}{1-q} - \frac{qsm}{v}\left\{\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^n}{1-q}\right\};$$

eine Formel, bei welcher nur noch $\frac{1}{1+t}$ anstatt q gesetzt zu werden braucht, und einige Reductionen vorzunehmen sind, bei welchen ich mich nicht aufhalten will. Wendet man sie bei jeder Periode an, von dem Alter angerechnet, von welchen man ausgeht, bis zu Ende der Sterb-

---

*) Durch die Differentialrechnung kömmt man sehr leicht zu diesem Resultate, denn es ist augenscheinlich, daß

$$1 + 2q + 3q^2 \ldots + nq^{n-1} = \frac{d(1 + q + q^2 \ldots + q^n)}{dq}$$

$$= \frac{d\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)}{dq}.$$ Auf gleiche Art findet man die Summen von analogen Reihen bei beliebiger Ordnung.

lichkeitstabelle, so giebt die Summe der für S' gefundenen Werthe, den von S. Die Hypothese von Moivre §. 106. ist darin bequem, daß sie, wenn man vom 12ten Jahre anrechnet, nur eine einzige Periode bildet.

§. 122.

Da man meistens eine Tabelle der Leibrenten für jedes Alter anfertigt, so hat Euler in der §. 110. angeführten Abhandlung bequem gefunden, die relative Mise eines jeden Alters aus der des folgenden abzuleiten. Bedient man sich der unten beigesetzten Zahlen, die das Alter bezeichnen, statt der Striche, womit v in der Formel §. 119. versehen ist, so erhält man für das Alter n

$$S_n = \frac{s}{v_n}\left\{\frac{v_{n+1}}{1+t} + \frac{v_{n+2}}{(1+t)^2} + \frac{v_{n+3}}{(1+t)^3} + \text{etc.}\right\}$$

und für das Alter $n+1$

$$S_{n+1} = \frac{s}{v_{n+1}}\left\{\frac{v_{n+2}}{1+t} + \frac{v_{n+3}}{(1+t)^2} + \text{etc.}\right\}$$

und das höchste Alter der Sterblichkeitstabelle giebt das letzte Glied dieser Reihen. Theilt man die zweite Gleichung durch $1+t$, multiplicirt alle Glieder der ersten Gleichung mit v_n, und die der zweiten mit v_{n+1}, und zieht die Producte Glied für Glied von einander ab, so bleibt die Gleichung übrig

$$v_n S_n - \frac{v_{n+1}}{1+t} S_{n+1} = s\,\frac{v_{n+1}}{1+t}$$

durch welche man S_n kennen lernt, wenn S_{n+1} bekannt ist, und sie kann dazu dienen, die Werthe des Kapitals zu berechnen, das die Rente s geben soll, wenn man beim

höchsten Alter anfängt. Gewöhnlich nimmt man s = 1 oder = 100.

§. 123.

Die Renten auf zwei Personen lassen sich auf eine ähnliche Art berechnen, wenn man statt der Wahrscheinlichkeiten $\frac{v'}{v}$, $\frac{v''}{v}$ rc. §. 119. die aufeinander folgende Reihe der Größen

$$ee' + e'f + ef' = 1 - ff'$$

substituirt, die §. 113. die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, daß irgend eine von den beiden Personen, auf welche die Rente bezogen wird, noch am Leben ist; oder auch, wenn man bei einer Tabelle, die das Gesetz anzeigt, nach welchem eine gegebene Anzahl von Verbindungen von bekannten Alter nach und nach absterben, die Betrachtungen zu Anfang des §. 119. anwendet.

§. 124.

Die einfachste Art der Tontinen ist im Grunde nur eine Annuität auf wahrscheinliche Frist; denn bei dieser Anstalt, wo die überlebenden Rentenirer, die nach und nach absterbenden beerben, bezahlt der Banquier alle Jahre dieselbe Summe bis zur völligen Erlöschung der ganzen Klasse Rentenirer von einem Alter. Nehmen wir an, es sey S die Summe, die sie alle gemeinschaftlich angelegt haben, s die Summe, die der Banquier ihnen jährlich auszahlen muß, und n die Zahl der Jahre, die bis zu dem höchsten Alter der Sterblichkeitstabelle verfließen müssen, so erhält man

$$S = s\left\{\frac{(1+t)^n - 1}{t(1+t)^n}\right\}$$

Was die Summe s anbelangt, so wird diese unter den Rentirern nach der Anzahl der Individuen, die jedes Jahr noch leben, vertheilt.

Wenn die Klasse der Rentirer sehr zahlreich ist, so ist klar, daß n die Anzahl der Jahre bedeutet, von dem angerechnet, in welchem sie diese Anstalt errichtet, bis zu dem letzten in der Sterblichkeitstabelle angegebenen Jahre, im entgegengesetzten Falle aber würde der Banquier ihnen unrecht thun, wenn er das Ziel der Annuität so weit hinausrücken wollte. Saint-Cyran hat in Vorschlag gebracht, das Jahr als Ziel anzunehmen, in welchem die Wahrscheinlichkeit, daß alle Rentirer gestorben seyn könnten, $\frac{1}{2}$ beträgt. Für zwei Rentirer z. B. würde es das Jahr seyn, bei welchem die Größe ff' aus §. 113. sich auf $\frac{1}{2}$ reducirt, nämlich dies wäre das Ziel der wahrscheinlichen Dauer der Gesellschaft.*)

Wenn die Rentirer nur einen Theil der Einkünfte der Verstorbenen erben, z. B. die Hälfte, so hat der Banquier zu bezahlen, am Ende des ersten Jahres $\left(v' + \frac{v - v'}{2}\right) = \frac{v + v'}{2}$ Renten, am Ende des 2ten Jahres $v'' + \frac{v - v''}{2} = \frac{v + v''}{2}$ und so fort; man erhält daher die Gleichung

*) Recherches sur les emprunts 2ter Thl. pag. 48. Wenn man dieselbe Dauer bei allen Leibrenten nehmen wollte, so würde sich die Berechnung auf die einer Annuität zurückführen lassen, und so noch um vieles einfacher werden; aber sie würde, sehr seltene Fälle ausgenommen, schwächere Renten zum Resultate geben, als nach dem Verfahren §. 119. erhalten werden. Unter dieser Bedingung würde diese Berechnung vielleicht passender seyn, wo nur von einer einzigen Rente die Rede ist, denn in diesem Falle wagt der Banquier viel, aber warum sollte der Rentirer einen nachtheiligen Contract eingehen, da er höhere Zinsen genießen kann, wenn er einer zahlreichern Anstalt beitritt.

$$S = \frac{s}{2v}\left\{\frac{v+v'}{1+t} + \frac{v+v''}{(1+t)^2} + \frac{v+v'''}{(1+t)^3} + \text{ꝛc.}\right\},$$

und jeder Rentirer erhält zu Ende des ersten Jahres die Summe $\frac{(v+v')s}{2v'}$, zu Ende des zweiten Jahres $\frac{(v+v'')s}{2v''}$ ꝛc.

§. 125.

Die Theorie der Sparkassen ist nicht viel von der der Leibrenten für eine einzige Person verschieden, und die Theorie der Kassen, durch welche den Wittwen eine Pension gesichert wird (der Wittwenkassen) ist der der Leibrenten für 2 Personen in vielem ähnlich.

Bei den Anstalten der ersten Art giebt jedes Mitglied entweder eine Summe, die er auf einmal bezahlt, oder einen jährlichen Beitrag, um ein Recht auf einen Gehalt im spätern Alter zu erhalten, oder auf Unterstützung, im Falle er von einer Krankheit befallen wird. Es ist leicht einzusehen, daß wenn S die gegebene Summe bedeutet, um dafür nach einer Anzahl von n Jahren eine Pension s zu bekommen, und ihre Werthe für den Zeitpunkt, wo die Person zu der Anstalt gegangen ist, berechnet werden, folgende Gleichung entsteht:

$$S = \frac{s}{v}\left\{\frac{v_n}{(1+t)^n} + \frac{v_{n+1}}{(1+t)^{n+1}} + \text{ꝛc.}\right\}$$

Werden jährliche Beiträge S, S_1, S_2 ꝛc. entrichtet, so muß man statt S folgendes substituiren

$$S + \frac{v_1 S_1}{v(1+t)} + \frac{v_2 S_2}{v(1+t)^2} + \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art werden die Abzüge angelegt, die man den in den verschiedenen Verwaltungsbehörden angestellten Beamten am Gehalte macht, um ihnen eine Pension für die Zeit ihrer Dienstunfähigkeit zu sichern.

Wenn diese Kasse Unterstützung in Krankheiten geben soll, so müssen die Producte dieser Unterstützungssummen mit der Wahrscheinlichkeit sie auszuzahlen, multiplicirt, und auf den ersten Zeitpunkt reducirt, in das 2te Glied der obigen Gleichung gebracht werden. Diese Wahrscheinlichkeit muß aus mit Sorgfalt angestellten Beobachtungen über die Zahl und mittlere Dauer der Krankheiten in der Klasse derjenigen Individuen, für die die Kasse besonders errichtet ist, gefolgert werden.

Die Nützlichkeit solcher Anstalten ist so augenscheinlich, daß schlichte fleißige Arbeitsleute und Landwirthe sich vereinigt haben, um welche zu bilden. Obgleich sie nicht alle nöthigen Hülfsmittel hatten, um ihre Berechnung fest und sicher zu machen, und ihre kleine Anzahl ihnen nicht so viel Sicherheit gab, als eine große Gesellschaft, so haben doch mehrere dieser Vereinigungen einen glücklichen Fortgang gehabt. Alle haben den Vortheil gefühlt, den sie haben würden, wenn sie sich weit ausbreiteten; aber fast alle befürchteten, wie man aus den interessanten Berichten die Dupont de Nemours der Société Philantropique gemacht hat, ersehen kann, die Blicke auf sich zu ziehen und durch habsüchtige Finanzsysteme des Staats in Anspruch genommen zu werden; denn nur durch eine große Sicherheit in ihren Anlagen können diese Kassen blühen. Die Idee, sie mit der Verwaltung der Leihhäuser zu verbinden, wie Hr. Mourgue in dem Plane in Vorschlag gebracht, den er dem Institute vorgelegt hat, würde sehr glücklich seyn, wenn diese Verwaltung, welche auch die kleinsten Summen anwenden kann, und deren Gelder in beständigem Umsatze sind, von den öffentlichen Fonds unabhängig wäre.

§. 126.

Die Form der Kassen, die den Wittwen einen Gehalt sichern sollen, kann auch auf mannichfaltige Art verschieden seyn, aber es ist hinreichend, die einfachste Form zu betrachten, um mittelst dem, was man in dem vorhergehenden gesehen hat, sich eine Vorstellung von der Art zu machen, wie die übrigen behandelt werden müssen. Da jeder verheurathete Mann entweder sogleich, wenn er heurathet, oder jährlich eine Summe unter der Bedingung giebt, daß wenn er stirbt, seine hinterlassene Wittwe entweder eine bestimmte Summe oder Rente erhalte, so kann man die Verhältnisse dieser Summen leicht ausdrücken, wenn man sie auf dieselbe Epoche reducirt, und mit den Wahrscheinlichkeiten sie bezahlen zu müssen multiplicirt.

Wenn die Bedingung, eine einzige Zahlung zu leisten, sowohl für jedes eintretende Mitglied, als auch für die Kasse ist, so ist es hinreichend, statt der Zahl v in der ersten Gleichung §. 125. die Zahl ee' aus §. 113. nach den für die Klasse von den hierbei interessirten Individuen besonders eingerichteten Tabellen berechnet, zu setzen, und statt der Zahlen v_n, v_{n+1} rc., die der Weiber, welche in jedem Jahre Wittwen werden, welches die Differenz der Werthe von e'f von einem Jahre zum andern ist.

Wenn die Zahlungen jährlich geleistet werden, sowohl von den Theilnehmern als durch die Kasse, so muß die zweite Gleichung aus §. 125. angewendet werden, wobei man statt v, v_1, v_2 rc. im ersten Gliede, die auf einander folgenden Werthe von ee' §. 113. und statt v_n, v_{n+1} rc. im zweiten Gliede, die von e'f, die die Zahl der zu Ende eines jeden Jahres noch lebenden Wittwen bezeichnen, setzen muß.

§. 127.

Diese summarische Auseinandersetzungen haben nichts anders zum Zweck, als die Beziehungen der verschiednen Arten kennen zu lernen, wie die Zinsen des Geldes mit den Fällen der Sterblichkeit sich verbinden lassen, und die Mittel, die man anwenden kann, um die darauf sich beziehenden Aufgaben zu lösen, und ich verweise daher auf die Schriftsteller, die besonders über diese Gegenstände geschrieben haben, und an deren Spitze Euler wegen seines Werks über Wittwenkassen genannt zu werden verdient; ich darf aber nicht unbemerkt lassen, daß wenn bei den Anleihen die Billigkeit erfordert, daß man dem Darleiher alles erstatte, was die Formel der mathematischen Hoffnung für ihn angiebt, dies doch bei den Kassen, die man für Spar- oder Hülfsgelder errichtet, nicht der Fall seyn kann. Diese verursachen Verwaltungskosten, die von allen Mitgliedern getragen werden müssen. Ueberdies muß die Kasse auch, so lange die Gesellschaft nicht zahlreich ist, einigen Vortheil nehmen, um so einen Fond zu bilden, durch den die von Zeit zu Zeit vorkommenden Unregelmäßigkeiten in den Ereignissen gedeckt werden können, sonst läuft sie Gefahr, sich außer Stand zu finden, die übernommenen Verbindlichkeiten erfüllen zu können. Sie giebt daher wen'ger Interessen, als der gewöhnliche Zinsfuß beträgt, oder hält einen Theil der geleisteten Zahlung zurück. Die Summe dieser Vortheile mit den ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multiplicirt, machen den Gewinn des Banquier aus, wie bei den Lotterien und den Spielen; aber seine Bestimmung erfordert noch, daß man den Fall unterscheide, wo die Kasse nur so lange Hülfe leistet, als die empfangenen Fonds reichen, von dem wo der Banquier es übernommen hat, auf seine Gefahr die Hülfe aus eignen Mitteln gegen die ihm zugestandenen Vortheile zu leisten.

§. 128.

Dieser letztere Fall findet bei Gesellschaften statt, die Waaren und Schiffe gegen die Gefahr des Meers oder des Krieges assecuriren, Häuser gegen Feuersgefahr, den Werth der Erndte gegen üble Witterung und im allgemeinen alle Arten des Handels, die dem Zufalle unterworfen sind. Derjenige, der sich in solche Speculationen einläßt, muß in der verlangten Prämie erstens eine beträchtliche Wahrscheinlichkeit haben, seine Gelder nicht über eine gewisse Grenze hinaus diesem Geschäft opfern zu müssen, um es lang genug fortsetzen zu können, zweitens muß er eine bedeutende Wahrscheinlichkeit haben, daß das Geschäft ihm einen Gewinn abwerfen werde, der zum mindesten den Interessen gleich ist, die seine Kapitalien bei einem Unterbringen, das ihm keiner Gefahr aussetzt, abgeworfen hätten, und der nächst diesem ihm die Arbeit vergüte, die das Geschäft ihm macht.

Das erste, was hier bestimmt werden muß, ist die Gefahr des Verlustes und die Wahrscheinlichkeit des Fortgangs. Es dürfte nicht leicht seyn, anzugeben, wie man sich dabei hinsichtlich der Seegefahren benommen hat; denn ich weiß nicht, daß man genaue und lange genug fortgeführte Listen über verlorne oder über in verschiednen Kriegen genommene Schiffe geführt hätte. Das Anfertigen und Untersuchen solcher Listen würde sehr umständlich seyn, weil man bei dem Ordnen der Begebenheiten, Ort und Zeit, sowohl der Abreise als der Ankunft, die Stärke des Schiffes und die der Ladung betrachten müßte. Die ausführliche Werthbestimmung des Verlustes würde noch umständlicher seyn, da man nicht blos den Körper des Schiffes, sondern auch die Waaren, die es trägt, versichert, und selbst für die Beschädigung dieser Gegenstände steht. Es scheint fast unmöglich die Menge dieser Umstände mit einiger Genauigkeit zu schätzen, aber es ist wahrscheinlich, daß die Kaufleute, da der Nutzen bei Unternehmungen zur See

anfangs sehr beträchtlich war, in der Absicht sich eine gewisse Ankunft der Waaren zu sichern, bedeutende Opfer bieten konnten, um kühne Speculanten zu versuchen. Der Gewinn, den diese dabei hatten, verschaffte ihnen bald Mitbewerber; da nun überdies der Nutzen an den Waaren geringer wurde, und die Gefahren durch Verbesserung der Schiffarth sich auch verminderten, so lernten die Unternehmer bald aus Erfahrung, was sie abgeben, und die Versicherer, was sie fordern mußten, um ihr Glück nicht zu sehr aufs Spiel zu setzen.

Wenn man gegenwärtig die Rechnung auf diese Arten der Assecuranzen anwenden wollte, so müßte man häufige Nachsuchungen in den Häfen machen, um sich genaue Bestimmungen zu verschaffen, aber man hat alle Ursache zu erwarten, daß dieses Verfahren nicht viel Früchte tragen würde, denn die Akademie der Wissenschaften hat diesen Gegenstand 3 mal zur Preisaufgabe in den Jahren 1783 bis 1787 gegeben, und hat keine befriedigende Auflösung erhalten können. Die Theorie war nicht schwer aufzustellen, aber die Thatsachen haben jederzeit gefehlt; und überdies hätte die Beobachtung der so großen Menge Gefahren von so verschiednen Werthen und Wahrscheinlichkeiren die Rechnung unanwendbar gemacht, wenn man nicht alle nur einigermaßen ähnliche Gefahren auf eine einzige von mittlerem Werthe und einer mittlern Wahrscheinlichkeit zurückgeführt hätte, was zwar weniger genau ist, was aber unmöglich zu vermeiden scheint, selbst bei andern Arten von Assekuranzen. Man hätte eigentlich auch der Strenge nach die Formeln der Wahrscheinlichkeiten a posteriori anwenden müssen, aber es würde nicht weniger nothwendig gewesen seyn, auch diesen Punkt der Kürze zu opfern.

§. 129.

Um also die Frage so viel als möglich zu vereinfachen, wollen wir nur zwei Begebenheiten beachten, das eine ganz

glücklich, dessen Wahrscheinlichkeit $= e$ sey, das andere hingegen verursache den Versicherer die Zahlung a, und die Wahrscheinlichkeit, daß er diese Zahlung werde leisten müssen, sey, f; ferner bezeichnen wir die Zahl der versicherten Schiffe durch p und durch b die Summe, die der Versicherer für jedes erhält. Dieses vorausgesetzt, so giebt die Summe der Glieder von der Reihe $(e+f)^p$ von dem ersten Gliede angerechnet, bis zu demjenigen, welches $e^{p-q} f^q$ enthält einschlüßlich die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der unglücklichen Begebenheiten nicht q übersteigen werde §. 22., und wenn man diese Summe bis zu dem Gliede ausdehnt, wo sie aufhört geringer zu seyn, als die Wahrscheinlichkeit zu der der Versicherer kommen will, daß er keinen größern Verlust erleiden werde, als den, welchen er als größten Schaden c zu erleiden sich vorgenommen hat, und q′ bedeutet den besondern Werth von q in diesem Gliede, so ist $q'a - pb$ der größte Verlust der der festgesetzten Wahrscheinlichkeit entspricht. Setzt man ihn gleich c, so erhält man die Gleichung

$$q'a - pb = c \text{ und daher } b = \frac{q'a - c}{p}$$

wird durch g der Gewinn ausgedrückt, welcher entsteht, wenn die Zahl der unglücklichen Ereignisse bis q″ nur sich erstreckt, so ergiebt sich die Gleichung

$$pb - q''a = g$$

und setzt man in diese den Werth von pb aus der vorhergehenden Gleichung, so ist

$$q'a - c - q''a = g \text{ oder } q' - q'' = \frac{c+g}{a}$$

woraus, wenn man g sich selbst bestimmt q″ durch q′ unabhängig von p sich erkennen läßt. Berechnet man nun die dem Werthe q″ entsprechende Wahrscheinlichkeit, so

wird man sehen, ob sie hinreichende Hoffnung giebt, den Gewinn erwarten zu können, den das Unternehmen nothwendig macht.

Sollte dieses nicht der Fall seyn, so könnte man die Wahrscheinlichkeit vermehren, wenn man für den Exponenten p, der die Zahl der versicherten Schiffe anzeigt, immer größere Zahlen nimmt, damit das Verhältniß $\frac{q'-q''}{p}$ immer kleiner werde, wodurch die Summe der Glieder, welche zwischen denjenigen enthalten sind, in welchen $e^{p-q'}f^{q'}$ und $e^{p-q''}f^{q''}$ vorkömmt, und aus welchen die Differenz der Wahrscheinlichkeiten des Verlustes und Gewinnes zusammengesetzt ist, immer mehr und mehr abnimmt.

Um den vorhergehenden Rechnungen alle Genauigkeit zu geben, deren sie fähig sind, muß man auch den Unterschied der Zeit in Rechnung bringen, zu welcher nach dem Assekuranz-Contracte die Summen a und b bezahlt werden müssen; oder was dasselbe ist, man muß statt der Größen a und b die Werthe dieser Summen auf einen und eben denselben Zeitpunkt reducirt, substituiren. Was den Werth der Wahrscheinlichkeiten anbelangt, die der Gewinn und Verlust erlangt, so könnte man ihn a posteriori bestimmen, wenn man die mittlern Resultate einer hinlänglich großen Anzahl mit Erfolg fortgesetzter Unternehmungen kennt; oder auch a priori, wenn man sie mit den Wahrscheinlichkeiten der Gefahren vergleicht, denen man sich freiwillig aus mehr oder weniger wichtigen Gründen aussetzt. Das eine wie das andere dieser Mittel hat Condorcet in dem Artikel Assurance in dem Dictionaire de Mathématiques de l'Encyclopédie méthodique in Vorschlag gebracht. Von dem andern werde ich bald Gelegenheit haben, die Grundlage anzugeben.

Nachdem das Interesse des Versicherers erörtert worden ist, sollte ich mich auch mit dem des Versicherten beschäftigen, allein dies würde zu weit führen. Ich beschränke mich darauf zu bemerken, daß die charakteristische Eigen-

thümlichkeit der Assekuranzen die ist, bei allen Unternehmungen derselben Art, wie groß auch ihre Anzahl sey, den Gewinn auf einen mittlern Werth zurück zu führen; denn die Entschädigung der Verunglückten geschieht ja nur durch den Gewinn, den die Versicherer von den nicht verunglückten Versicherten erhalten; es ist also ungefähr eben so, als wenn alle ihre Gelder zusammen gethan hätten und übereingekommen wären, wenigstens nach einem gewissen Verhältnisse die einzelnen Verluste zu ersetzen. So z. B. bei den Erndten, als wenn man einen Theil des Ueberflusses aus den Gemeinden, die sie glücklich eingebracht, den andern, die gelitten haben, zukommen ließ. Die Versicherer sind gewissermaßen nur die Mittelspersonen dieser fingirten Vereinigung, und der Gewinn, den sie dabei haben, muß als Gehalt für ihre Mühe bei diesem Geschäft angesehen werden. Wenn es ein anderes Mittel gäbe, die Gefahr zu vertheilen, so wären die Assekuranzen überflüssig, und dieses wäre natürlich bei dem Kaufmanne der Fall, der unmittelbar an eine große Anzahl Unternehmungen Theil hätte, und bei Eigenthümern, die zerstreute Besitzungen in vielen von einander abgesonderten Gemeinden hätten.

Von der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse und der Rechtsentscheidungen.

§. 130.

Das Zeugniß läßt die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu, wenn man es mit dem Wurf eines Würfels vergleichen kann; man hat dieses dadurch versucht, daß man annahm, derselbe Zeuge sage bei einer gegebenen Anzahl von Aussagen eine bestimmte Anzahlmal die Wahrheit, oder stimme mit ihr überein. Wir wollen zuvörderst die

hauptsächlichsten Folgen aus dieser Hypothese ziehen, und hernach die Uebereinstimmung derselben mit dem Gegenstande untersuchen.

Es sey v die Zahl der Fälle, in welchen der Zeuge die Wahrheit sagt, und m die der entgegengesetzten Fälle; so ist die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit seiner Aussage $\frac{v}{v+m}$ und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{m}{v+m}$.

Nehmen wir nun an, daß ein anderer Zeuge, für welchen die den vorhergehenden analogen Zahlen v′ und m′ sind, über dieselbe Thatsache aussage, so sind die Wahrscheinlichkeiten für und wider die Wahrheit seines Zeugnisses $\frac{v'}{v'+m'}$ und $\frac{m'}{v'+m'}$ und man wird, ehe die Aussagen bekannt sind, die Wahrscheinlichkeiten haben

$$\frac{vv'}{(v+m)(v'+m')}, \quad \frac{mm'}{(v+m)(v'+m')} \quad (§. 16.)$$

daß die Zeugen übereinstimmen, sey es um die Wahrheit zu sagen oder um zu lügen, und die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{vm'}{(v+m)(v'+m')}, \quad \frac{mv'}{(v+m)(v'+m')},$$

daß sie sich widersprechen werden, indem der erste die Wahrheit aussagt und der zweite lügt, oder umgekehrt.

Wenn die Aussagen bekannt sind, und sie stimmen überein, so sind nur die beiden erstern oben angezeigten Ereignisse möglich; man hat daher die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{vv'}{vv'+mm'} \text{ und } \frac{mm'}{vv'+mm'} \quad (§. 13.)$$

daß die Uebereinstimmung der Zeugen entweder zu Gunsten

der Wahrheit oder der Lüge statt haben. Wenn sie sich widersprechen, so sind nur die beiden letztern Ereignisse möglich, und es gehen daraus die Wahrscheinlichkeiten hervor

$$\frac{vm'}{vm' + mv'} \text{ und } \frac{mv'}{vm' + mv'}$$

daß die Aussage der ersten Zeugen wahr sey, oder die des zweiten.

§. 131.

Es ist leicht diese letztern Formeln auf jede beliebige Anzahl von Zeugen auszudehnen, und legt man ihren Zeugnissen dieselbe Wahrscheinlichkeit bei, indem man $v = v' =$ ꝛc. und $m = m' =$ ꝛc. setzt, und es ist p die Anzahl dieser Zeugen, die in ihren Aussagen übereinstimmen, so ergiebt sich hieraus für die Wahrheit der ausgesagten Thatsache die Wahrscheinlichkeit $\frac{v^p}{v^p + m^p}$ und für das Gegentheil $\frac{m^p}{v^p + m^p}$. Theilt man die beiden Theile des ersten Bruches durch v^p, so giebt seine neue Form $\frac{1}{1 + \frac{m^p}{v^p}}$ zu erkennen, daß er mit p zugleich wächst, wenn $v > m$ und umgekehrt, wenn p größer wird, abnimmt, sobald $v < m$, und daß folglich, wenn die Zeugen häufiger lügen, oder sich irren, als sie die Wahrheit sagen; die Uebereinstimmung ihrer Behauptung um so weniger Gewicht hat; je größer ihre Anzahl ist.

Wenn sie sich widersprechen, und unter allen sind p die dieselbe Thatsache behaupten, und q die sie verneinen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erstern die Wahrheit sagen

$\frac{v^p m^q}{v^p m^q + m^p v^q}$ und ihr Gegentheil $\frac{m^p v^q}{v^p m^q + m^p v^q}$.

Theilt man die Zähler und Nenner dieser Brüche durch $v^q m^q$, so verwandeln sie sich in

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}} \text{ und } \frac{m^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}},$$

als Wahrscheinlichkeiten, die der Uebereinstimmung von $p - q$ Zeugen entsprechen. Der Werth der Aussage reducirt sich daher in diesem Falle, auf die einstimmige Aussage einer Zahl von Zeugen, die dem Ueberschusse der Zahl der Zeugen die Bejahen, über die, welche verneinen gleich ist.

§. 132.

Wenn jemand wieder erzählt, oder berichtet, was er von einem andern erfahren hat, und was dieser andere wieder von einem andern hat und so fort, so finden bei dieser Art Zeugnisse, welche Traditionen heißen, alle die Combinationen statt, die zu Anfang des §. 130. angegeben sind; denn da in der Reihe der Zeugen, die nach einander über die Thatsache ausgesagt haben, der letzte allein von dem gehört wird, der Erkundigung darüber einzieht, so ist man in Ungewißheit, ob derjenige, der ihm vorhergieng, wirklich das gesagt hat, was dieser für seine Aussage ausgiebt, oder nicht, und zugleich ob jene erste Aussage Wahrheit oder Lüge war. Wenn man also nur zwei Personen in der Reihe der Zeugen berücksichtigt, so entspringen daraus die vier Wahrscheinlichkeiten, die in dem angeführten §. angegeben sind.

Die beiden letzten Wahrscheinlichkeiten entsprechen offenbar der Unwahrheit der Ueberlieferung, da einer der beiden Zeugen gelogen hat. Wenn aber von Zeugnissen auf ja und nein, nämlich von contradictorischen Behauptungen

die Rede ist, so entspricht die zweite Wahrscheinlichkeit, welche voraussetzt, daß die beiden aufeinander folgenden Aussagen falsch waren, eben so gut der Wahrheit als die erste, nach welcher die Aussagen beider als wahr vorausgesetzt werden. Denn wenn der erste Zeuge ja gesagt hat, wo er nein hätte sagen sollen, so wird der zweite, der das Gegentheil von dem sagt, was er von den ersten erfahren hat, nein sagen, also die Wahrheit. Man hat daher in diesem Falle für die Wahrheit der Tradition die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{vv'+mm'}{(v+m)(v'+m')}$$ und für das Gegentheil $$\frac{vm'+mv'}{(v+m)(v'+m')}.$$ *)

Die erstere dieser Wahrscheinlichkeiten übersteigt immer die zweite, wenn zu gleicher Zeit

$$v>m,\ v'>m' \text{ oder } v<m,\ v'<m'$$

denn die Differenz der Zähler ist

$$vv'+mm'-vm'-mv'=(v-m)(v'-m'),$$

ein Produkt, das immer positiv ist, wenn die beiden Factoren dasselbe Zeichen haben.

---

*) Dieser besondere Fall ist von M. P. Provost, Professor der Philosophie zu Genf, in seinen Leçons sur le calcul des probabilités angegeben, er unterscheidet daselbst die Zeugen in gleichzeitige oder Augenzeugen, und in aufeinander folgende oder traditionelle Zeugen. Man sehe den 2ten Theil seiner Essais de Philosophie pag. 86. und eine Abhandluug die von ihm und M. l'Huillier gemeinschaftlich ist, und die sich in den Abhandlungen der Academie zu Berlin Jahrgang 1797 pag. 131 befindet. Aus dieser Abhandlung ist ein großer Theil des gegenwärtigen Artikels und der beiden folgenden entlehnt.

§. 133.

Wenn die Reihe der Traditionen aus einer beliebigen Anzahl p von Zeugen besteht, und die Aussage eines jeden eine gleiche Wahrscheinlichkeit hat, so sind die verschiednen Combinationen der Wahrheit und des Irrthums enthalten, in der Reihe von

$$(v+m)^p = v^p + \frac{p}{1} v^{p-1} m + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} v^{p-2} m^2$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{p-3} m^3 + \text{etc.}$$

in welcher alle Glieder, wo der Exponenten von m eine gerade Zahl ist, weil er eine gerade Anzahl aufeinander folgender Unwahrheiten anzeigt, zu Gunsten der Wahrheit der Tradition genommen werden müssen, wenn die Aussagen nur contradictorisch verschieden sind. Die Wahrscheinlichkeit derselben ist daher

$$\frac{v^p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} v^{p-2} m^2 + \text{etc.}}{(v+m)^p}$$

und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\frac{p}{1} v^{p-1} m + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{p-3} m^3 + \text{etc.}}{(v+m)^p}$$

Diese Ausdrücke werden um vieles vereinfacht, wenn man berücksichtigt, daß der Zähler des ersten Ausdrucks den Werth hat von

$$\frac{(v+m)^p + (v-m)^p}{2}$$

und der des zweiten Ausdrucks

$$\frac{(v+m)^p - (v-m)^p}{2}$$

und sie werden nun respective

$$\frac{(v+m)^p + (v-m)^p}{2(v+m)^p} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{v-m}{v+m}\right)^p\right\}$$

$$\frac{(v+m)^p - (v-m)^p}{2(v+m)^p} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{v-m}{v+m}\right)^p\right\}$$

§. 134.

Die beiden Arten von Zeugnissen, die wir im Vorhergehenden betrachtet haben, können mit einander verbunden werden. Eine Anzahl p von Zeugen berichten z. B. jeder besonders über eine Thatsache, die sie von einer Person haben, die Augenzeuge derselben war; die Wahrscheinlichkeit also, daß die Zeugen getreu das berichten, was ihnen jener gesagt hat, ist, wenn sie einstimmig sind

$\frac{v^p}{v^p + m^p}$ (§. 131.) und das Gegentheil $\frac{m^p}{v^p + m^p}$.

Nehmen wir nun an, daß die Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses von den Augenzeugen ebenfalls $\frac{v}{v+m}$ sey, und das Gegentheil $\frac{m}{v+m}$ so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die letzte Aussage wahr sey

$$\frac{v^{p+1}}{(v^p + m^p)(v+m)},$$

wenn man nur Zeugnisse, die der Wahrheit gemäß sind, zuläßt, und

$$\frac{v^{p+1} + m^{p+1}}{(v^p + m^p)(v + m)}$$

wenn zwei aufeinander folgende Lügen, der Wahrheit gleich geachtet werden.

Wenn dieselbe Thatsache durch mehrere Reihen von genauen Traditionen übertragen worden wäre, von welchen jede aus einer Anzahl p aufeinander folgenden Aussagen besteht, und nur die letzte allein wäre von demjenigen gehört worden, der die Untersuchung vornimmt, so würde man zuvörderst für jede Reihe besonders die Wahrscheinlichkeiten der Wahrheit und des Irrthums haben

$$\frac{(v+m)^p + (v-m)^p}{2(v+m)^p} \text{ und } \frac{(v+m)^p - (v-m)^p}{2(v+m)^p} \quad (§. 133)$$

Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeiten durch V und M und die Anzahl der Reihen der Aussagen durch q, und nimmt ferner dabei an, daß sie übereinstimmend sind, so ergiebt sich hieraus eine Wahrscheinlichkeit

$$\frac{V^q}{V^q + M^q}$$

zu Gunsten der Wahrheit der behaupteten Thatsache.

Dieser Ausdruck hängt von dem Verhältnisse v zu m ab; und um ihn zu bestimmen, muß man zuvor bemerken, daß der Ausdruck von M dem von V entgegengesetzt ist, weil $V + M = 1$, und daß daher, wenn $v = m$ man $V = M = \frac{1}{2}$ erhält, und daß dieser Werth die Grenze ist, welcher sich diese Größen in allen andern Fällen nähern, je größer p wird. Die erstere ist immer größer als $\frac{1}{2}$, wenn v, m an Größe übersteigt; wenn aber das Gegentheil statt findet, so ist $V <$ oder $> \frac{1}{2}$, nachdem p ungrade oder gerade ist. Diese besondere Veränderung, welche das Hinzukommen eines einzigen Zeugen hervorbringt,

kömmt von dem doppelt falschen, also der Wahrheit gemäßen Zeugnisse (§. 132.)

§. 135.

Wir haben bisher angenommen, daß die Aussagen entweder vollkommen war, oder vollkommen falsch seyn, was in der Wirklichkeit nur alsdann statt finden kann, wenn die Untersuchung auf einfache Fragen zurück geführt ist, auf welche man nur ja oder nein antworten kann. Auf diesen Punkt muß man freilich immer streben, sie, indem man die Aussagen analisirt, zurückzuführen, aber wenn dieses nicht möglich ist, so muß man mehr als zwei Arten Zeugnisse unterscheiden. Lambert, der sich damit in seinem neuen Organon beschäftigt, klassificirte sie in wahre, nichtsbesagende und in falsche.

Nimmt man immer den Würfel als Sinnbild, so muß man in diesem Falle annehmen, er habe 3 Arten Seiten, und daher muß man auch bei jedem Versuche eine gleiche Anzahl möglicher Ereignisse umfassen. Die auf diesen Fall sich beziehenden Formeln (§. 51.) lösen alle die vorhergehenden analogen Fragen, aber die Rechnung ist zu weitläufig, um in dieser Abhandlung Platz finden zu können.

Zusatz des Uebersetzers.

Lambert wirft die Frage auf, welches muß die Glaubwürdigkeit eines Zeugen seyn, der die Stelle von zwei Zeugen, deren Glaubwürdigkeit bekannt ist, gerade ersetzt? Die Auflösung kann auf folgende Art geschehen:

Die Glaubwürdigkeit des ersten Zeugen sey von der Art, daß man ihm in M Fällen (z. B. in 10 Fällen) glauben, in N Fällen (3) nicht glauben, und in P Fällen (1) das Gegentheil glauben muß, so kann die Glaubwürdigkeit dieses Zeugen ausgedrückt werden durch

$$Ma + Nu + Pe$$

$$(\text{oder } 10a + 3u + 1e)$$

wo a, u und e die Begriffe, Wahrheit, Irrthum und Lüge bezeichnen.

Sind nun die Größen für den zweiten Zeugen in derselben Ordnung m (12), n (5) und p (2), so ist seine Glaubwürdigkeit

$$ma + nu + pe$$

$$(\text{oder } 12a + 5u + 2e).$$

Beide Zeugen nun stimmen entweder in ihren Aussagen überein oder nicht, im letztern Falle sind ihre Aussagen entweder ungleichartig, oder sie widersprechen sich.

Stimmen sie überein, so müssen die einzelnen Posten des Produkts ihrer Glaubwürdigkeit, also von

$$(Ma + Nu + Pe)\,(ma + nu + pe)$$

auf folgende Art geordnet werden:

$$\left.\begin{array}{r} Mmaa \\ + mNau \\ + Mnau \end{array}\right\}$$ dieses giebt $Mm + mN + Mn$ Fälle, in welchen die Wahrheit gesagt wird.

$$\left.\begin{array}{r} + Mpae \\ mPae \end{array}\right\}$$ Also $Mp + mP$ Fälle, in welchen sie sich widersprechen müßten, und da dies der Annahme, sie stimmen überein, zuwider ist, so können diese Fälle nicht vorkommen.

$+ Nnuu$ also Nn Fälle, wo sie sich irren

$$\left.\begin{array}{r} + Npue \\ + nPue \\ + Ppee \end{array}\right\}$$ $Np + nP + Pp$ Fälle, in welchen gelogen wird.

Daher wird die Glaubwürdigkeit eines Zeugen, der beide ersetzt, ausgedrückt durch

$$(Mm + mN + Mn)a + Nnu + (Np + nP + Pp)e$$

oder in dem angenommenen besondern Falle

$$206a + 15u + 13e$$

dem Zeugen, der beide ersetzen soll, wird man daher in 206 Fällen glauben, in 15 Fällen nicht glauben, und in 13 Fällen das Gegentheil glauben müssen, wenn die Glaubwürdigkeit der beiden Zeugen durch die oben angegebenen Zahlen ausgedrückt wird. Ist die Aussage beider ungleichartig, so läßt sich dafür keine Summe angeben, und beide Zeugen können daher alsdenn auch nicht durch einen einzigen ersetzt werden.

Widersprechen sich die Zeugen aber, so muß man die Glaubwürdigkeit des zweiten Zeugen in die des Gegentheils verwandeln, und also für

$ma + nu + pe$ das entgegengesetzte

$pa + nu + me$ nehmen,

und es mit $(Ma + Nu + Pe)$ multipliciren, und hierauf, wie im ersten Falle, schließen.

Auf diese Art kann man sich leicht überzeugen, in welchen Fällen die Glaubwürdigkeit durch das Anhäufen der Zeugen wächst.

Man vergleiche hiermit: Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein, durch J. H. Lambert, Leipzig 1764. 2ter Bd. S. 399—400.

§. 136.

Wenn man bedenkt, wie viele Thatsachen falsch befunden wurden, obgleich sie auf viele Zeugnisse und hinlängliche Autorität gestützt waren, so ist man geneigt, unter sonst gleichen Umständen den Aussagen um so weniger Glauben beizumessen, je mehr die Thatsachen, welche sie bezeu-

gen, sich von dem entfernen, was täglich vor unsern Augen vorgeht. Denn wenn bei solchen Begebenheiten die Zahl der Lügen oder der Irrthümer in einem viel größern Verhältniß zu der ganzen Zahl der Aussagen steht, als bei andern, die nicht von der gewöhnlichen Ordnung abweichen, so kann das Gewicht der Zeugnisse für die ersten nicht dasselbe wie für die letzten seyn. Die Form des Würfels muß sich nach der Natur der Begebenheiten ändern; aber hier zeigt sich wieder einer von den Umständen, deren in §. 69. Erwähnung geschah, wo man der Rechnung die Form zu geben sich bestreben muß, durch welche die Resultate den Bemerkungen der gesunden Vernunft sich nähern. Man sieht ein, daß statt des beständigen Verhältnisses, durch welches nach der Hypothese §. 130. die Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses vorgestellt wird, ein Ausdruck substituirt werden muß, wodurch dieses Verhältniß mit der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit der bezeugten Thatsache abnimmt, aber man findet in der Natur des Gegenstandes keine hinlänglich begränzten Bedingungen, um ein genaues Verhältniß zwischen diesen beiden Elementen herstellen zu können. Man hat sich darauf beschränkt, die der Begebenheit eigne Wahrscheinlichkeit so zu betrachten, als wenn sie die Wahrscheinlichkeit eines zweiten Zeugnisses wäre, das mit dem erstern zugleich abgelegt würde. Dieses giebt für die Aussage die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{vv'}{vv'+mm'},\ \frac{mm}{vv'+mm'}\ (\S.\ 130.)$$

wenn man annimmt, daß die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit der Thatsache $\frac{v'}{v'+m'}$ und ihr Gegentheil $\frac{m'}{v'+m'}$ sey.*)

*) Dieses hat Condorcet gethan. Mem. de l'Acad. des Sciences 1783. pag. 553.

Wenn diese Thatsache z. B. das Herausziehen einer weißen Kugel aus einer Urne ist, die nur diese Kugel mit 999999 schwarze Kugeln vermischt enthält, so ist

$$v' = 1 \quad m' = 999999$$

und die dem Zeugnisse günstige Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{v}{v + 999999m}.$$

§. 137.

Laplace berücksichtigt besonders die Redlichkeit und den Verstand des Zeugen, und drückt daher auch die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge aussagt, was er gesehen oder gehört hat, und die, daß er richtig gesehen und gehört habe, jede besonders aus;*) daher ergeben sich über seine Aussage folgende vier Hypothesen:

1) Er kennt die Wahrheit } und will die Wahrheit sagen.
2) oder er ist in Irrthum }

3) Er kennt die Wahrheit } und will lügen.
4) oder er ist in Irrthum }

Die letztere begreift einen Fall in sich, der dem des doppelt falschen Zeugnisses ähnlich ist (§. 132.), denn indem der Zeuge über die Wahrheit zu betrügen sucht, die er nicht kennt, so kann er sie gerade treffen; und in der That läuft das Vorhergehende darauf hinaus, in dem Zeugen zwei Personen sich zu denken, von welchen die eine immer die Wahrheit sagend eines Irrthums in einem gewissen Verhältnisse fähig ist, und die andere, die sich nicht irren kann, mehr oder weniger häufig die Wahrheit verhehlt.

---

*) Théorie analytique des Probabilités p. 446.

Laplace berechnet, indem er die beiden aufeinander folgenden Zeugnisse mit einander und mit der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit der Thatsache verbindet, die Wahrscheinlichkeit einer jeden Hypothese, und theilt durch die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten, die Summe derjenigen, die für die Wahrheit der Behauptung sind.

Benennen wir mit ihm die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge die Wahrheit sagen will mit p, mit r die Wahrscheinlichkeit, daß er sie gefaßt hat, und mit $\frac{1}{n}$ die der berichteten Thatsache, was hier das Herausziehen der Nummer i aus einer Urne, die n Nummern enthält, ist, so erhält man für die Wahrheit in der ersten Hypothese die Wahrscheinlichkeit $\frac{pr}{n}$.

In der zweiten Hypothese, wo die Nummer i nicht herausgekommen ist, ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\frac{n-1}{n}$ und die, daß der Zeuge sich irre, ist $1-r$; indessen darf man nicht schließen, daß die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $p(1-r)\frac{n-1}{n}$ sey, denn das nicht Herauskommen der Nummer i ist nicht das ganze geschehene Ereigniß, es kömmt noch dazu das falsche Bemerken der Nummer i unter allen, die nicht herausgekommen sind, eine Täuschung, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$ beträgt. Berücksichtigt man diesen Umstand, so wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$ und die der Hypothese $\frac{p(1-r)}{n}$.

In der dritten Hypothese muß man die Wahrscheinlichkeiten $1-p$, daß der Zeuge lügt, r daß er die Wahr-

heit kenne und $\frac{r}{n}$ die aus dem nicht Herauskommen der Nummer i und der Wahl, die der Zeuge davon macht, entsteht, mit einander verbinden; man erhält hieraus das Resultat $\frac{(1-p)r}{n}$.

In der vierten Hypothese ist $(1-p)(1-r)$ die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses, weil der Zeuge lügt und die Wahrheit nicht kennt; aber das Ereigniß kann das Herauskommen oder auch das Nichtherauskommen der Nummer i seyn. Die Wahrscheinlichkeit des erstern Falles ist $\frac{1}{n}$ da aber der Zeuge glaubt, es sey eine andere Nummer herausgekommen, wird er immer von den übrigen $n-1$ Nummern eine wählen, von der er behauptet, sie sey herausgekommen; die Wahrscheinlichkeit, daß diese Wahl auf i fällt, ist folglich $\frac{1}{n-1}$; und da diese Wahl mit dem Herauskommen von i zusammentreffen muß, so wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{1}{n(n-1)}$ seyn, und die des Zeugnisses also $\frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}$; wobei nicht vergessen werden darf, daß es zu Gunsten der Wahrheit ist.

Wenn man diesen Fall nicht von allen denen unterscheidet, die in der letzten Hypothese enthalten sind, so hat die Meinung des Zeugen, die immer auf das Herauskommen einer Nummer, die nicht i ist gerichtet ist, eine Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er die unter den $n-1$ Nummern wählen wird, von der er glaubt, daß sie nicht herausgekommen sey, ist $\frac{1}{n-1}$; und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist folglich noch immer $\frac{1}{n}$, da-

her wird die Wahrscheinlichkeit der Hypothese $\frac{(1-p)(1-r)}{n}$ seyn. Endlich erhält man

$$\frac{\frac{pr}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}}{\frac{pr}{n} + \frac{p(1-r)}{n} + \frac{(1-p)r}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n}} = pr + \frac{(1-p)(1-r)}{n-1}$$

ein Ausdruck, der sich auf p reducirt, wenn $r=1$ ist, d. h. wenn der Zeuge keines Irrthums fähig ist, und dieser Werth wird um so geringer, je mehr n zunimmt.

Vielleicht könnte man in dieser Frage einigen Zweifel über die Nothwendigkeit hegen, die Wahrscheinlichkeit der Wahl mit in Rechnung zu ziehen, die der Zeuge von einer andern Nummer als derjenigen macht, die er weiß oder zu wissen glaubt; und wie insbesondere sich die Wahrscheinlichkeiten r und p bestimmen lassen? Es ist demnach schwer zu glauben, daß die obige Formel anders wozu diene, außer als Beispiel der scharfsinnigen Untersuchungen, die der Gegenstand, mit dem wir uns beschäftigen, zuläßt. In dieser Hinsicht will ich noch folgende aus demselben Werke entlehnte Aufgabe hinzufügen.

§. 138.

A und B sind zwei Urnen, von welchen die erstere n weiße Kugeln und die zweite n schwarze Kugeln enthält; aus einer dieser Urnen, man weiß nicht aus welcher, ist eine Kugel gezogen, und in die andere Urne geworfen worden, und hierauf hat man aus dieser letztern Urne eine Kugel gezogen. Zwei Zeugen, von

welchen der eine nur die erste Ziehung und der andere nur die zweite Ziehung gesehen hat, behaupten, daß eine weiße Kugel gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses?

Die Schwierigkeit befindet sich hier in der Vereinigung der beiden Zeugen; denn jeder für sich behauptet nur eine sehr mögliche Sache, wenn man nur einen einzigen Zug berücksichtigt, weil die eine der beiden Urnen nur weiße Kugeln enthält, und die Wahrscheinlichkeit, daß der Zug aus dieser Urne geschehen ist, beträgt $\frac{1}{2}$. Allein wenn man annimmt, daß der erste Zug aus der Urne A geschehen sey, so hat der zweite nothwendigerweiße aus der Urne B statt gehabt, die nur die einzige weiße Kugel enthält, die aus der Urne A genommen ist, das zweite Erscheinen dieser Kugel wird um so unwahrscheinlicher, je größer die Anzahl der schwarzen Kugeln ist; und dieser Fall ist der einzige, in welchem das Zeugniß beider wahr seyn kann.

Es sey also q und q′ die Wahrscheinlichkeiten für die Wahrheit eines jeden Zeugen besonders, und wir wollen hiernach die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Hypothesen, die der Gegenstand zuläßt, schätzen.

1) Es sey aus A der erste Zug geschehen, da nun $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist, und q die, daß der Zeuge die Wahrheit sagt, so ist die Wahrscheinlichkeit der Aussage $\frac{q}{2}$; B aber enthält, wenn aus ihr die zweite Ziehung geschieht, $n+1$ Kugeln, und unter diesen eine weiße, daher ist die Wahrscheinlichkeit des von dem zweiten Zeugen bezeugten Ereignisses $\frac{1}{n+1}$; nun ist die, daß er die Wahrheit sagt q′, daher drückt $\frac{q'}{n+1}$ die

Wahrscheinlichkeit seiner Aussage aus, und $\frac{qq'}{2(n+1)}$ die der Wahrheit ihrer Uebereinstimmung. (Daß wirklich die weiße Kugel beidemal gezogen worden ist.)

2) Der zweite Zeuge lügt, und die aus der Urne B gezogne Kugel ist schwarz. Die Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{n+1}$ eines solchen Zuges mit $(1-q')$ als der Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Zeuge lügt, verbunden, giebt für die Falschheit seiner Behauptung $\frac{(1-q')n}{(n+1)}$ und für die Wahrheit der Hypothese $\frac{q(1-q')n}{2(n+1)}$.

3) Wenn der erste Zeuge lügt, so wäre die erste Kugel schwarz, und also nothwendigerweise aus der Urne B gezogen; die Wahrscheinlichkeit dieses Theils der Hypothese ist $\frac{1}{2}(1-q)$. Da hiernach der zweite Zug aus der Urne A geschieht, die n weiße Kugeln und nur eine schwarze in sich faßt, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Herauskommen einer weißen Kugel $\frac{n}{n+1}$, die der Behauptung des zweiten Zeugen $\frac{q'n}{n+1}$ und die der Hypothese $\frac{(1-q)q'n}{2(n+1)}$.

4) Wenn der zweite Zeuge ebenfalls lügt, so ist die aus der Urne A beim zweiten Zuge herausgekommene Kugel schwarz; die Wahrscheinlichkeit dieses Zuges ist $\frac{1}{n+1}$, die Wahrscheinlichkeit dieses Theils der Hypothese wird $\frac{1-q'}{n+1}$ seyn, und die der ganzen Hypothese $\frac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}$.

Die relative Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese, die einzige, nach welcher beide Zeugnisse wahr sind, ist hiernach

$$\frac{qq'}{qq' + q(1-q')n + (1-q)q'n + (1-q)(1-q')}$$

und wird um so geringer, je größer n ist. Setzt man

$$q = q' = \tfrac{9}{10},\ n = 1000000,$$

so erhält man den sehr kleinen Bruch $\frac{81}{18000082}$.

§. 139.

Da die Erörterung der Zeugnisse sich öfters auf Gegenstände bezieht, für die man schon zum Voraus eingenommen ist, so hat es sich zugetragen, daß einige Schriftsteller die Rechnung zu Gunsten der Resultate eingerichtet haben, die sie zu erhalten wünschten oder für nöthig erachteten. Auf diese Art kann man wenigstens die Theorie der gleichzeitigen Zeugnisse erklären, die ohne daß der Autor sich genannt hat in Nr. 256. der phylosophischen Transactionen Jahr 1699 p. 359 bekannt gemacht ist, die älteste Schrift, die ich über diesen Gegenstand kenne, und die Bicquilley in seiner Abhandlung über Wahrscheinlichkeitsrechnung 1783 aufgenommen hat.*) Er war ohne Zweifel über die so wenig mit dem Zweck, den er erreichen wollte, zusammenstimmende Schnelligkeit bestürzt, mit welcher die Wahrscheinlichkeit dieser Zeugnisse abnimmt, wenn man, wie man soll, die Fälle eines jeden Zeugnisses unter sich verbindet, und die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit weniger als $\frac{1}{2}$ beträgt; daher nahm der englische Autor an, daß wenn ein Zeuge über eine Thatsache ausgesagt hat, die Bestätigung des zweiten Zeugen immer einen Theil der Ungewißheit aufhebe, die der erste gelassen hat, und daher

---

*) Eine deutsche Uebersetzung dieses Werkes ist 1788 in Leipzig herausgekommen. U.

die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit in Verhältniß nach der Wahrscheinlichkeit der zweiten Aussage vermindere. Wenn z. B. die Wahrscheinlichkeit des ersten Zeugnisses durch $\frac{2}{3}$ ausgedrückt wird, und die des zweiten durch $\frac{1}{4}$, so addirt er zu der erstern $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$, und man hat folglich für beide Zeugnisse zusammengenommen die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{12},$$

während sie nach den Formeln §. 130. nicht mehr als $\frac{2}{3}$ betragen.

Schließt man auf gleiche Art bei einer beliebigen Anzahl von Zeugnissen, wo die Wahrscheinlichkeiten des Irrthums n, n', n'' ꝛc. betragen, so findet man für die der Wahrheit

$$1 - n + n(1 - n') = 1 - nn' \text{ bei 2 Zeugnissen}$$

$$1 - nn' + nn'(1 - n'') = 1 - nn'n'' \text{ bei 3, ꝛc.}$$

Ausdrücke, deren Werthe eine wachsende Reihe bilden, welches auch die Wahrscheinlichkeiten n, n' ꝛc. seyn mögen, und woraus folglich hervorgeht, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses immer mit der Anzahl der Augenzeugen wächst. Dieser Schluß kann in gewissen Fällen bequem seyn, aber er reicht auch hin, um die Unrichtigkeit der Hypothese davon abnehmen zu können; denn man braucht nur wenig nachzudenken, um sich von der Schwierigkeit, ja beinahe Unmöglichkeit zu überzeugen, worin sich unwissende und zahlreiche Zuschauer befinden, sich nicht beim Anblick außerordentlicher Begebenheiten zu täuschen.

Wenn Gaukler und Taschenspieler ihre Künste mit Gewandheit zeigen, und man von dem Mißtrauen abstrahirt, welches einem aufgeklärten Menschen die Erscheinungen, die der täglichen Erfahrung zuwider sind, einflößen müssen, hat denn wohl irgend ein Zuschauer noch einen andern Grund nicht an die Wirklichkeit der Wunder zu glauben, die man ihm vormacht, wenn er Zweck und Form des Schauspiels

nicht einsieht? Anstatt der Vorbereitungen, die eine Täuschung ankündigen, begleitet gewöhnlich ein feierlicher Ernst diese vorgeblichen Wunder; sie werden übernatürlichen Kräften zugeschrieben; sie erregen dadurch allgemeine Spannung und schmeicheln dem Geschmacke des gemeinen Mannes für alles, was außer dem gewöhnlichen Wege der Natur liegt, und der Neigung alle Schwierigkeiten zu zerschneiden, vor welchen die Vernunft stehen bleiben muß. Hume hat es wohl bewiesen, daß die Wunder, wo nicht unmöglich, doch sehr schwer zu bestätigen sind.*) Die häufigsten Naturerscheinungen konnten zum erstenmale gesehen wohl für Wunder gehalten werden, und es ist der gesunden Vernunft keineswegs zuwider, die Grenzen des Möglichen weiter zu stecken, als die unserer Erfahrung; aber doch ist es nicht die erste Erscheinung solcher Phänomen, welche deren Existenz wirklich bestätigt. Man hat lange, und hinsichtlich des Charakters der Erzählungen und des Zwecks des Erzählers mit Recht das Fallen der Meteorsteine geläugnet. Dieses ganz neue Beispiel der Art, wie eine außerordentliche Begebenheit endlich Platz unter den Wirklichkeiten gewinnt, beweißt hinlänglich, daß nur durch mehrmalige und eigens dazu angestellte Beobachtungen und unpartheiische Untersuchungen die Wahrheit erkannt wird. Wenn der Geometer Fatio de Duillier, der durch einen fanatischen Enthusiasmen verwirrt, es 1707 öffentlich zu London unternahm, einen Todten wieder zu erwecken, nicht eben so verwirrte Maaßregeln genommen hätte, und weniger von der Polizei bewacht worden wär, so hätte er gewiß sein Wunder ausgeführt. Das Flüssigwerden des Blutes vom heiligen Januarius in Neapel hat immer eine Menge Zeugen, die etwas scheinbar festes flüssig werden sehen; aber wer untersucht und bestätigt, daß diese Masse geronnen Blut sey,

*) David Humes Untersuchung über den menschlichen Verstand, deutsche Uebersetzung von Tennemann. Seite 247—309. U.

und daß diese Veränderung des Zustandes nicht durch chemische Mittel geschieht? Die Wunder in den heidnischen Tempeln, welche den Orakelsprüchen vorhergiengen oder sie begleiteten, sind zum Theil vor unsern Augen durch die Bauchredner wieder nachgemacht worden, während sie als Wunder in der alten Geschichte durch eine Menge Zeugnisse bestätigt werden. Auch sieht man Leute von sonst vielem Verstande, welche den Wundern völligen Glauben beimessen, und daß in Religionsstreitigkeiten zwischen den Bekennern der christlichen Religionen und denen des alten Cultus man meistens von beiden Seiten über die Wirklichkeit der Wunder übereinstimmt, und nur in dem Wesen, das sie bewirkt, verschiedner Meinung ist. *)

Wenn man die Zeugnisse derer sammeln wollte, die Gespenster gesehen haben, die *thätigen* oder leidenden Theil an optischen Täuschungen *und* Zaubereien nehmen, würde man nicht mehr *finden*, als nöthig wäre, diesen Chimären eine sehr große Wahrscheinlichkeit zu geben? Sie waren vor *einiger* Zeit besonders so sehr im Schwunge, daß es nur ganz geringer Anzeigen bedurfte, um an sie glauben zu machen.

§. 140.

Wenn also die Hypothese §. 130., welche von den berühmtesten Geometern angenommen worden ist, die diesen Gegenstand behandelt haben, nicht völlig genau allen den Umständen entspricht, die er darbietet, so kömmt dies nicht daher, weil sie den Zeugnissen zu wenig Zutrauen leiht, sondern weil der Gegenstand selbst nicht wohl der Rechnung unterworfen werden kann, da die Wahrhaftigkeit und das Einsehen der Menschen, wenn sie sehr gespannt und ein-

---

*) Tacitus (Hist. lib. IV. Cap. 81.) das durch Vespasian in Alexandrien bewirkte Wunder.

genommen sind, große Veränderungen erleidet, und besonders wenn von wunderbaren Sachen die Rede ist. Außerdem daß diese Sachen an sich mehr täuschen, macht uns unsere Neigung zum Enthusiasmus in der Regel unfähig, die Ursache der Täuschung gehörig zu untersuchen; und beinahe immer knüpfen sie sich entweder durch sich selbst oder durch die Verleitung der Geheimnißkrämer an Gegenstände oder Vorstellungen von höchster Wichtigkeit, wodurch sie uns zum Voraus einnehmen, oder die Stimme der Vernunft beschwichtigen.

Ohne indessen zu mehr oder weniger verwickelten Hypothesen unsere Zuflucht nehmen zu müssen, reicht das Studium der Geschichte hin, um daraus abzunehmen, wie wenig Zutrauen die Zeugnisse verdienen, wenn durch sie Thatsachen bestätigt werden sollen, die dem gewöhnlichen Gange der Natur entgegen sind; da die in den Zeiten der Unwissenheit so häufigen Wunder abnehmen, so wie die Aufklärung zunimmt, welche den Geist des Zweifels und der Prüfung zurückführt, und dadurch die Täuschungen, welche in den Zeiten, wo die Wissenschaften noch in ihrer Kindheit waren, so häufig angetroffen wurden, schwerer oder wenigstens nicht dauernd macht. Man kann zwar keine genauen Zahlen für den Werth der Zeugnisse in jedem Falle angeben; aber da man sieht, daß zu allen Zeiten und an allen Orten selbst die Wunder, die am meisten in Ansehen standen, endlich falsch befunden wurden, und andere an ihre Stelle traten, die bald dasselbe Schicksal hatten, so kann man sagen, je mehr Zeit und Raum man zusammenfaßt, desto mehr erkennt man die Schwäche der Wahrscheinlichkeit bei dieser Gattung der Ereignisse, und man kömmt dahin zurück, daß die Stetigkeit der Naturgesetze, wovon uns Reisen und wissenschaftliche Entdeckungen beinah jeden Tag neue Beweise geben, allen unsern Urtheilen zur Grundlage dienen müsse.

Dieses Schwächen der Zeugnisse mit der Zeit hat nichts mit dem Vergessen gemein, welchem die einfachen blos dem

Gedächtnisse der Menschen oder Monumenten anvertrauten Begebenheiten unterworfen sind, die das Alter oder Revolutionen bald zerstören, da sie nicht in großer Menge vorkommen. Es fehlen uns die Data, um diesen Verlust der Rückerinnerung, der Rechnung unterwerfen zu können; aber die Buchdruckerkunst hat ihn ansehnlich vermindert; und so lange als die Werke bestehen werden, worin die tiefen und scharfsinnigen Untersuchungen aufbewahrt werden, die die Facta und Meinungen, aus welchen die Wissenschaften bestehen, nach ihrem wahren Werthe ordnen, wird es unmöglich seyn, alte Irrthümer auf eine dauerhafte Art wieder in Aufnahme zu bringen, oder neue zu veranlassen.*)

§. 141.

Die Entscheidungen nach der Mehrheit der Stimmen bei Versammlungen und Tribunälen haben viel ähnliches mit den Zeugnissen, und können gleichfalls der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen werden, wenn man annimmt, daß die Gewohnheit des Geistes bei jedem Stimmenden stetig sey, so daß immer dasselbe Verhältniß zwischen der Zahl der Stimmen, wo er der Wahrheit gemäß urtheilt, zu der Zahl derjenigen, wo er sich irrt, beibehalten wird; und wenn man die erste dieser Zahlen mit v und die

*) Craig, der die Wirkungen der fortschreitenden Aufklärung mit dem Schwächerwerden der Zeugnisse verwechselte, hatte den sonderbaren Gedanken, die Rechnung auf Theologie anzuwenden, um hierdurch die Dauer des Christenthumes nach dem stufenweisen Schwächerwerden der Zeugnisse, auf welche es gegründet ist, zu berechnen, und er fand für diese Dauer 1454 Jahr von 1699 an gerechnet. Am Ende dieser Frist sollte eine neue Erscheinung Christi und eine zweite Offenbarung den Glauben in seiner ganzen Stärke wieder herstellen. (Theologiae christianae Principia Mathematica.)

zweite mit m bezeichnet; so ist die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit einer Stimme

$$\frac{v}{v+m} \text{ und ihr Gegentheil } \frac{m}{v+m}.$$

Die verschiedenen Glieder der Reihe $(v+m)^p$ zeigen hiernach alle Verbindungen an, nach welchen eine Anzahl p von Stimmenden, bei der Voraussetzung, daß sie alle gleich redlich und gleich verständig sind, zwischen der Wahrheit und dem Irrthume sich vertheilen können. Da das allgemeine Glied

$$\frac{p(p-1)\,.\,.\,.\,.\,(p-q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,q}\,v^{p-q}m^q$$

die Zahl der Verbindungen anzeigt, in welchen $p-q$ Stimmen für die Wahrheit, und q für den Irrthum sind, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Theilung

$$\frac{p(p-1)\,.\,.\,.\,(p-q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,q}\;\frac{v^{p-q}m^q}{(v+m)^p}.$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, daß die Entscheidung durch völlige Uebereinstimmung geschehen wird, ohne daß man die Stimmen für die Wahrheit von denen, die irrig sind, unterscheidet, so erhält man

$$\frac{v^p+m^p}{(v+m)^p}.$$

Ist die Entscheidung ausgesprochen, und man kennt die Zahl der Stimmenden die für, und die Zahl derjenigen, die wieder dieselbe sind, so braucht man bei der gesuchten Wahrscheinlichkeit nichts in Betracht zu ziehen, als die Verbindungen, die mit diesen Facten zusammenstimmen; und man findet, wie §. 131., daß die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit eines durch p Stimmende einstimmig gefällten Urtheils

$$\frac{v^p}{v^p + m^p}$$

ist, und blos

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}}$$

beträgt, wenn p für diese Entscheidung sind, und q dagegen, oder was dasselbe ist, wenn die Mehrheit der Stimmen für dieselbe $p-q$ beträgt. Uebrigens haben die Bemerkungen, die über den Gang der Wahrscheinlichkeiten, wenn von Zeugnissen die Rede ist, gemacht worden sind §. 131., gleichfalls bei den Entscheidungen statt, und sie stimmen mit dem schlichten Menschenverstande überein, indem sie anzeigen, daß man eher die Gerechtigkeit der Entscheidung von der Aufklärung, als von der Zahl der Stimmenden erwarten müsse.

§. 142.

Wenn man hier, wie bei allen übrigen Gattungen des Zufalls voraussetzt, daß die Ereignisse, wenn sie häufig wiederholt werden, Verhältnisse geben, die ihren Wahrscheinlichkeiten sehr nahe kommen, so kann man das Verhältniß der Zahlen v und m bestimmen, wenn man bei einer großen Menge von Entscheidungen das Verhältniß der Gesammtzahl zu der Anzahl derjenigen kennt, die einstimmig gefällt worden sind, und die Zahl der Stimmenden, die man immer als gleich annimmt; denn bezeichnet man dieses Verhältniß durch $\frac{r}{n}$, so hat man augenscheinlich

$$\frac{v^p + m^p}{(v+m)^p} = \frac{r}{n}.$$

Dieses Mittel hat Laplace in Vorschlag gebracht; *) und indem er der Kürze wegen setzt

$$\frac{v}{v+m} = e \text{ also } \frac{m}{v+m} = 1-e$$

so erhält er die Gleichung

$$e^p + (1-e)^p = \frac{r}{n}$$

woraus der Werth der Wahrscheinlichkeit e sich erkennen läßt. Diese Gleichung, die nur bis zum 2ten Grade geht, wenn $p = 3$ ist, giebt alsdann

$$e = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4r-n}{12n}\right)};$$

und nimmt man an, daß die Hälfte der Urtheile einstimmig gefällt worden sey, oder daß $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich daraus $e = 0{,}789$. Dieses ist die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit einer jeden Stimme, nach der aufgestellten Hypothese.

Nimmt man ferner aus obiger Gleichung den Werth von e^p, um ihn in der Formel

$$\frac{v^p}{v^p + m^p} = \frac{e^p}{e^p + (1-e)^e}$$

die die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit einer einstimmigen Entscheidung ausdrückt, zu substituiren, so erhält man

$$1 - \frac{n}{r}(1-e)^p;$$

man hätte auf gleiche Art $(1-e)^p$ statt e^p aus der Gleichung wegschaffen können.

---

*) Theorie analytique des Probabilites pag. 460.

Diese Formeln sind sehr einfach, aber sie setzen voraus, daß das Verhältniß $\frac{v}{m}$ unveränderlich sey, eine Voraussetzung, die für einen langen Zeitraum, während welchem die Grundsätze der Politik der Verwaltung und der Gerechtigkeitspflege sich mit dem Zustande der Aufklärung ändern, und eben so die Begriffe und Meinungen über die gemeinschaftlichen Rechte aller Menschen, so wie über die, welche einigen Klassen der Gesellschaft besonders zugehören, nicht anwendbar ist. Die selbst alsdann nicht statt haben könnte, wenn jene Umstände sich nicht geändert hätten.

§. 143.

Wirklich bietet die Formel

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q}+m^{p-q}}.$$

eine Folgerung dar, die die gesunde Vernunft verwirft. Sie giebt unverändert dasselbe, so lange die Zahl $p-q$ sich nicht ändert, möge $p+q$, welches die Zahl der Stimmenden ausdrückt, einen Werth haben, welcher es auch sey, man mag z. B. $p=25$, $q=10$ oder auch $p=220$ und $q=205$ setzen. In diesen beiden Fällen ist die Mehrheit der Stimmen $p-q=15$ Stimmen; aber man kann doch nicht umhin, der erstern Entscheidung mehr Zutrauen zu schenken, als der letztern, weil man eher geneigt ist, das Gewicht der Mehrheit der Stimmen nach ihrem Verhältnisse zu der Zahl der Stimmenden zu schätzen, als nach der absoluten Anzahl der Mehrheit.*)

Sucht man sich Rechenschaft von der Ausnahme zu geben, die hier die natürliche Vernunft von der Uebereinstimmung mit einem streng geführten Calcul macht, so muß

*) Essai sur la Probabilité des Décisions p. 242.

man mit Condorcet bemerken, daß diese Verminderung des Zutrauens von der Wahrscheinlichkeit einer jeden Stimme abhängt, eine Wahrscheinlichkeit, die man als kleiner ansieht, wenn die Entscheidung nur durch geringe Stimmen-Mehrheit erfolgt ist, als im entgegengesetzten Falle, was von der besondern Schwierigkeit der zu entscheidenden Frage abhängen kann. Hierdurch kömmt man wieder auf die allgemeinen Grundsätze, in welchen die Rechnung und die gesunde Vernunft übereinkamen; denn da das größte Glied der Reihe von $(v+m)^p$ dasjenige ist, in welchem die Exponenten der Größen v und m mit diesen Größen in demselben Verhältnisse stehen, oder sich diesem Verhältnisse am meisten nähern (§. 27.), so zeigen diese Exponenten die wahrscheinlichste Theilung der Stimmen in einer Versammlung, und jede andere ist es um so weniger, je mehr sie sich von derselben entfernt.

Eine große Menge von denselben Stimmenden über eine und eben dieselbe Gattung von Fragen geschehen Entscheidungen, bei beinahe unveränderlicher Stimmen-Mehrheit würde die Grenzen für die wahrscheinlichste Theilung der Stimmen kennen lehren, und so zu Näherungswerthen des Verhältnisses der Zahlen v und m führen; aber dieses Mittel ist fast um nichts mehr anwendbar, als das §. 142. Die Untersuchung aller Entscheidungen durch eine hinlängliche Anzahl aufgeklärter Personen, die von allen Interessen sowohl was die Entscheidungen selbst, als auch was die Stimmenden betrifft, frei sind, würde allerdings wichtige Aufklärungen geben, wenn diese Untersuchung selbst nicht fast unmöglich zu bewerkstelligen wäre, entweder weil die Materialien fehlen, oder auch weil sie zu verworren sind.

§. 144.

Es sey dem wie ihm wolle, so zwingt uns diese Nothwendigkeit die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit einer jeden Stimme selbst bei den gewöhnlichsten Dingen als ver-

änderlich ansehen zu müssen, statt der Ausdrücke der Wahrscheinlichkeiten a priori die der Wahrscheinlichkeiten a posteriori zu substituiren; und durch dieses Mittel findet Condorcet wirklich, daß die Wahrscheinlichkeit einer Entscheidung sich vermindern müsse, wenn die Zahl der Stimmenden sich vermehrt, und die Stimmenmehrheit dieselbe bleibt. Wir wollen nur eine der Hypothesen, die er untersucht, nämlich die, bei welcher er stehen bleibt, angeben. Nachdem er eingesehen hatte, daß man mit einigem Anschein von Genauigkeit nur zu einer hinlänglich beträchtlichen Wahrscheinlichkeit gelangen könne, daß die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit einer jeden Stimme innerhalb gegebner Grenzen eingeschlossen sey, sucht er die mittlere Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit einer Entscheidung, die durch eine gegebne Anzahl von Stimmenden bei einer bestimmten Stimmen-Mehrheit geschehen ist. *)

Bezeichnet man durch a und b die Werthe, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit enthalten seyn muß, die wir oben durch $\frac{v}{v+m}$ ausgedrückt haben, so findet man mittelst der Betrachtungen §. 87. die mittlern Wahrscheinlichkeiten, daß p Stimmen für die Wahrheit und q irrig seyn werden, oder besser das Gegentheil

$$C\left\{S_b^{(p,q)} - S_a^{(p,q)}\right\},\ C\left\{S_b^{(q,p)} - S_a^{(q,p)}\right\}$$

wodurch die relative Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall erhalten wird

$$\frac{S_b^{(p,q)} - S_a^{(p,q)}}{(S_b^{(p,q)} - S_a^{(p,q)}) + (S_b^{(q,p)} - S_a^{(q,p)})}$$

(Siehe Note III.)

*) Essai sur la Probabilité des Décisions pag. 244 — 245.

Laplace, der in der zweiten Ausgabe seiner Théorie analytique des Probabités diese Bemerkungen nicht beachtet hat, beschäftigt sich damit in der 3ten Ausgabe seiner Essai philosophique über denselben Gegenstand; und er giebt den Grenzen a und b, die Condorcet als aus den Untersuchungen alter Entscheidungen abgeleitet annimmt, die Werthe $\frac{1}{2}$ und 1, die weitesten, die man annehmen kann, weil es aufhört, wahrscheinlich zu seyn, daß die Entscheidung durch Mehrheit der Stimmen der Wahrheit gemäß sey, wenn die Wahrscheinlichkeit einer jeden Stimme geringer als $\frac{1}{2}$ ist. (§. 141.) Folgendes sind einige Resultate aus dieser Hypothese, die pag. 159 des so eben angeführten Werkes, wo auch obige Formeln stehen, enthalten sind. „In den Tribunälen, wo 5 Stimmen von 8 zur Verdammung des Angeklagten hinreichen, ist die Wahrscheinlichkeit des zu fürchtenden Fehlers über die Güte des Urtheils $\frac{65}{256}$ oder mehr als $\frac{1}{4}$; die Größe dieses Bruches, sagt Laplace mit Recht, ist erschrecklich.“ Bei einem geschwornen Gerichte, das aus 12 Mitgliedern besteht, ist die Wahrscheinlichkeit des Irrthums nur $\frac{1093}{8192}$ etwas mehr als $\frac{1}{8}$, wenn die Entscheidung durch 8 Stimmen geschieht, $\frac{378}{8192}$ ungefähr $\frac{1}{22}$, wenn 9 Stimmen hierzu erforderlich sind, und nur $\frac{1}{8192}$, wenn alle einstimmig seyn müssen, was Bedingung bei den englischen Gerichten ist; woraus folgt, daß dieses Gericht den Vorzug haben würde, wenn andere Betrachtungen nicht bewiesen, daß dieses Uebereinstimmen öfters erzwungen werden kann. Aber was bei den Entscheidungen dieser Gerichte beruhigen muß, wenigstens in gewöhnlichen Zeiten, und wenn die Mitglieder derselben von keiner Empfindung für oder wider die Klasse der Beschuldigten, die sie zu verurtheilen haben, eingenommen sind, und worauf sich ihr Vorzug vor den ältern Tribunälen gründet, ist, daß jeder gefühlvolle Mensch Schauder in seiner Seele empfindet, einen andern ungerechter Weise ganz oder auch nur zu einer zu schweren Strafe zu verdammen, eine Empfindung, die durch lange Gewohnheit

Beschuldigte zu verhören und zu verurtheilen, freilich viel, selbst bei dem besten Naturel, wie Laplace bemerkt, geschwächt wird. Nichts ist also betrübter für die Menschheit und für die Gerechtigkeit als die Nothwendigkeit, wenn es dahin kömmt, außerordentliche Tribunäle errichten zu müssen, bei welchen es sehr schwer hält, daß der Angeklagte nicht gleich durch die Natur des ihm angeschuldigten Verbrechens ein sehr ungünstiges Vorurtheil gegen sich habe; auch giebt man der Einrichtung dieser Gerichte hauptsächlich den Beweggrund, daß die Gesellschaft in gewissen Fällen dadurch, daß man die Schuldigen ungestraft läßt, in Gefahr sey.

§. 145.

Condorcet hat für die gewöhnlichen Verbrechen auf diesen letztern Umstand Rücksicht genommen; er sucht das Interesse eines Angeschuldigten mit der Sicherheit der Gesellschaft zu vergleichen, und wendet den ersten Theil seines Werkes dazu an, für eine große Menge Annahmen der Stimmen-Mehrheit die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß ein Unschuldiger nicht verurtheilt und ein Schuldiger nicht freigesprochen werden wird. Zu dieser Absicht legt er sich folgende Fragen vor:

1) Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Irrthum nicht die erforderliche Stimmenmehrheit erhalten werde?

2) Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Wahrheit diese Stimmenmehrheit haben wird?

Ereignisse, die nicht contradictorisch einander entgegengesetzt sind, wenn mehr als die bloße Mehrheit der Stimmen, oder daß die Zahl der Stimmenden gleich sey, verlangt wird.

Denn wenn man die Wahrscheinlichkeit für die Wahrheit einer jeden Stimme unveränderlich annimmt, und dabei der Kürze wegen setzt

$$\frac{v}{v+m} = e, \quad \frac{m}{v+m} = f$$

und es sind p Stimmende, so erhält man

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1} f + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} e^{p-2} f^2 \ldots\ldots$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2) \ldots (p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots q} e^{p-p} f^q$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl der der Wahrheit gemäßen Stimmen nicht unter p — q betragen wird; wenn also eine Mehrheit von r Stimmen erforderlich ist, um einen Angeklagten zu verurtheilen, und er frei gesprochen wird, wenn diese Mehrheit nicht gegen ihm ist, so wird obiger Ausdruck bis zu dem Gliede fortgesetzt, wo

$$q-(p-q) = r-2 \text{ also } q = \frac{p+r}{2} - 1$$

die Wahrscheinlichkeit geben, daß die Wahrheit die Stimmenmehrheit nicht gegen sich haben wird, und folglich der Angeklagte nicht ungerechterweise verdammt werden wird. Dieses war die erste Frage.

Die zweite Frage hängt ebenfalls von obigem Ausdrucke ab, aber nur bis

$$p-q-q = r \text{ also } q = \frac{p-r}{2}$$

fortgesetzt, eine Bedingung, nach welcher die Wahrheit wenigstens die erforderliche Mehrheit für sich hat, und daher nothwendig angenommen und folglich der schuldige Angeklagte verurtheilt wird.

Der Unterschied dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, welcher von dem Theile der Reihe von $(e+f)^p$ gebildet wird, welcher bei dem Gliede anfängt, welches $e^{1/2(p+r)-1} f^{1/2(p-r)+1}$ enthält bis zu demjenigen, in welchem $e^{1/2(p-r)+1} f^{1/2(p+r)-1}$ enthalten ist, schließt alle Fälle in sich, wo weder die Wahrheit, noch der Irrthum die erforderliche Stimmen-Mehrheit haben, und verändert sich mit den Zahlen r und p. *) Diesen Unterschied zu vermindern, und dabei den möglichst größten Werth für die erstere Wahrscheinlichkeit zu behalten, muß das Bestreben bei dem Errichten der Tribunäle seyn, eine Betrachtung, die der des §. 129. analog ist. Condorcet hat alle Combinationen sorgfältig untersucht, zu welchen sie führen kann, wenn man annimmt, daß die Zahl der Stimmenden gerade oder ungerade sey, die Mehrheit der Stimmen beständig oder der Zahl der Stimmenden proportionirt oder auch zum Theil beständig und zum Theil dieser Zahl proportionirt. Er prüft hierauf die Beziehungen, welche die verschiednen Größen unter sich haben, die in der Rechnung entweder als gegeben, oder als gesucht vorkommen, und er hat die Frage so vielfältig zerlegt und verändert, daß wir uns nicht darauf einlassen können. Man kann freilich gegen diese Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit eben so vielem Recht, als bei den Zeugnissen Einwendungen machen, und wir haben schon die wesentlichsten derselben angezeigt, die sich bei diesem Gegenstand darbieten; wenn

*) Ich übergehe der Kürze wegen die Untersuchung, welche Form die Zahlen r und p haben müssen, damit die Exponenten der Buchstaben e und f ganze Zahlen werden; man kann dieses leicht ergänzen. Auch sieht man ein, daß wenn in der zweiten Wahrscheinlichkeit e und f gegenseitig ihre Stellen wechseln, der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit erhalten wird, daß der Irrthum die erforderliche Stimmen-Mehrheit haben werde, was das entgegengesetzte der erstern von den oben angezeigten Wahrscheinlichkeiten ist.

inzwischen die Hypothesen, zu welchen man seine Zuflucht hat nehmen müssen, nicht viel Zutrauen zu den erhaltenen Resultaten zulassen, so ist doch die Kenntniß der Combinationen, welche hierbei vorkommen, und die Veränderung der Werthe, die sich daraus ableiten lassen, nicht ganz ohne Nutzen, da sie die Ueberlegung auf das, was wirklich geschehen kann, leiten, wenigstens wo es sich nicht um auffallende Veränderungen in der Wahrscheinlichkeit der Stimmen handelt, und dazu dienen können, Thatsachen zu ordnen, um genaue und anwendbare Folgen daraus abzuleiten.

§. 146.

Die Wahlen sind ebenfalls Entscheidungen, wenn man sie in Beziehung auf die Güte der Auswahl, die von der Aufklärung und Unpartheilichkeit der Wählenden abhängt, betrachtet; und man kann hier fragen, welches ist die Wahrscheinlichkeit, das ein Candidat, der nach einer gegebenen Form zur Wahl gelassen wird, wirkliche Vorzüge vor seinen Mitbewerbern hat. Unglücklicherweise stören Leidenschaften die Rechnung hier nicht weniger als bei den Zeugnissen und Entscheidungen. Vergebens haben Condorcet und andere Publicisten Formen gesucht, welche der Intrigue keinen Einfluß gestatten; entweder sind diese Formen der Probe der Erfahrung nicht unterworfen worden, oder man hat sie mangelhaft befunden. Aber läßt man diese Ansicht der Aufgabe unbeachtet, und betrachtet blos eine Wahl, oder was dasselbe ist, eine Entscheidung nach der Mehrheit der Stimmen unter verschiednen Vorschlägen als ein Mittel die Streitigkeiten zu schlichten, indem man dem Wunsche der größern Anzahl nachgiebt, so bleiben noch immer viele Schwierigkeiten in gewissen Fällen festzusetzen, welches wirklich dieser Wunsch sey?*) Die Ausdehnung,

---

*) Diesen Unterschied scheint man vor Daunou, der ihn in seiner vortrefflichen Abhandlung, die er über diesen Gegenstand

die dieses Werk erreicht hat, erlaubt mir kaum einige allgemeine Grundsätze über jede dieser Unterscheidungen des Gegenstandes anzugeben.

Wenn nur zwei Candidaten vorhanden sind, so ergiebt sich die Mehrheit der Wahlstimmen für einen von ihnen sogleich, und zeigt die Vorzüge des Gewählten, wenn die Wählenden gleich einsichtsvoll sind; auf jeden Fall aber ergiebt es sich, daß er den Wunsch des größten Theils für sich hat; aber es ist dem nicht mehr so, sobald auch nur drei Candidaten vorkommen. Denn wenn ein Wählender nur für den stimmt, den er am meisten schätzt, so läßt er die Ordnung des Vorzugs der beiden andern unentschieden, die er angeben müßte, wenn er unter ihnen zu wählen hätte; aber wenn jeder Stimmende die 3 Namen der Candidaten nach der Ordnung der Verdienste, die er ihnen beimißt, auf einen Zettel schrieb, könnte es da nicht kommen, daß derjenige, welcher nach der Mehrheit der Stimmen der erste war, und bei allen übrigen der letzte weniger Verdienste hätte, als derjenige, dem alle, die ihm nicht die erste Stimme gaben, die zweite Stelle einräumten. Es ist leicht einzusehen, daß dieses von dem Werthe abhängen wird, den man dem Unterschiede der Verdienste in jedem Range beilegt.

Wenn man z. B. nach der Wahlform die Borda in Vorschlag gebracht hat, *) den respectiven Verdiensten der Candidaten dem ihnen angewiesenen Range proportionirte Werthe beilegt, nämlich wenn man hiernach 3 für den ersten Rang, 2 für den zweiten und 1 für den dritten schreibt, wenn es 3 Candidaten sind, die durch die Buch-

im Jahre 1803 in der Klasse der moralischen und politischen Wissenschaften des Instituts vorlas, und die besonders gedruckt wurde, und äußerst schwer zu haben ist, nicht gekannt zu haben.

*) Mémoires de l'Académie des Sciences Jahrg. 1781. p. 657.

staben A, B, C bezeichnet werden, und unter 100 Stimmenden geben 65 die Rangordnung ABC an, und 35 BCA; so ist klar, daß die Stimmenmehrheit für *A* ist, da er von 65 Wählenden als Vorzüglicher wie alle andere betrachtet wird; schätzt man indessen die relativen Verdienste der Candidaten nach der Summe der Zahlen, die sie auf alle Zettel haben, so findet man für A nicht mehr als

$$65 . 3 + 35 . 1 = 230,$$

während B, der nur 35 mal den ersten Rang aber 65 mal den zweiten einnimmt

$$65 . 2 + 35 . 3 = 235$$

hat, und nach dieser Wahlform folglich den Vorzug haben müßte.

Es würde sich gegen diese Folgerung nichts einwenden lassen, wenn die Abstufung der Zahlen genau wär, und auf rechtliche Weise angeordnet würde, aber es ist nicht schwer einzusehen, daß sie in der erstern Hinsicht sehr unsicher ist, und in der zweiten Hinsicht der Kabale Vorschub leistet. Setzt man statt der bestimmten Zahlen 3, 2, 1, die Buchstaben p, q, r, so kömmt man nach derselben Wahlform zu der Wahl von A, wenn man annimmt

$$65 p + 35 r > 35 p + 65 q$$

was auf unendlich viele Arten seyn kann. Läßt man den Buchstaben q und r ihre primitiven Werthe 2 und 1, so wird obige Bedingung

$$65 p + 35 > 35 p + 130 \text{ oder } 30 p > 95,$$

woraus sich ergiebt, daß es hinreichend ist, $p > 3\frac{1}{6}$ zu machen, wenn die Summe der für A erhaltenen Zahlen die größte seyn soll; kann man aber die Verdienste der Candidaten mit so großer Genauigkeit abwiegen? und haben überdies die Stimmenden im Geiste ein gemeinschaft-

liches Maaß, auf welches die Einheit, die sie anwenden, sich genau bezieht? Außerdem werden die strengen Richter, die Candidaten zu sehr herabsetzen, und die nachsichtigern ihnen zu große Zahlen geben.

Die Herabwürdigung kann selbst geflissentlich geschehen, in der Absicht, einen Mitbewerber, den man am meisten fürchtet, zu entfernen. Denn in dem so eben gegebenen Beispiele sind 35 Wählende überzeugt, daß A und B die besten Candidaten sind, sie wollen aber A ausschließen, und brauchten daher nur einverstanden zu seyn, ihn auf den letzten Rang zu setzen, und machen dadurch den Wunsch einer großen Mehrheit zu seinen Gunsten unnütz. Man hat nur zu oft erfahren, daß, sobald ein solcher Umstand bemerkt wird, die Leidenschaften ihn zu benutzen wissen, und man glaube ja nicht, daß dieser Umstand nur in einigen Fällen Einfluß haben könne, er ist im Gegentheil sehr ausgedehnt und bedeutend; denn es sey $m+n$ die Zahl der Wählenden und m die Zahl der Zettel von der Form ABC und n diejenigen, von der Form BCA, so kann A nur gewählt werden, so lange noch

$$3m+n > 2m+3n \text{ oder } m > 2n,$$

er muß also mehr als $\frac{2}{3}$ der Wahlstimmen haben. Die Schwierigkeiten werden noch bedeutender bei dieser Wahlform, wenn die Anzahl der Candidaten größer ist.

§. 147.

Wenn man die große Schwierigkeit, um nicht zu sagen Unmöglichkeit einsieht, durch die Schätzung eines jeden zu wählenden eine genaue Werthbestimmung der respectiven Verdienste der Candidaten zu erhalten, so muß man als Maaß desselben den deutlich ausgedrückten Wunsch der Mehrheit annehmen; und das Mittel, was sich darbietet, um diesen Wunsch kennen zu lernen, ist die Stimme eines je-

den Wählenden über je zwei und zwei Candidaten aufzunehmen. Hierzu können jene den Candidaten zugetheilten Nummern dienen, sobald man ihnen keine andere Functionen giebt, als den Rang anzudeuten, den ihnen die Wählenden geben. Z. B. die Ordnung ABC will nichts anders sagen, als daß der Wählende der Meinung ist

A ist besser als B }
B ist besser als C } woraus folgt A ist besser als C,

was wir der Kürze wegen so ausdrücken wollen

$$A > B,\ B > C \text{ daher } A > C.$$

Dieses vorausgesetzt, so können drei Candidaten je 2 und 2 auf sechs verschiedne Arten zusammengestellt werden, man muß daher die aufgezeichneten Nummern auf obige Art zerlegen, und aussuchen, welche Ordnungen die meisten Stimmen für sich haben, und so bestimmen, welche Ordnung angenommen werden muß.

Es seyn z. B. 60 Wählende über die Ordnung der Candidaten so vertheilt, daß

23 für ACB, 19 für BCA
16 für CBA, 2 für CAB.

Stellt man zuerst die Vergleichung zwischen A und B an, so findet man, daß für die Meinung $A > B$, $23 + 2 = 25$ Wahlstimmen sind, und für das Gegentheil $B > A$, $19 + 16 = 35$.

Die Meinung $A > C$ hat 23 Stimmen für sich, und ihr Gegentheil $C > A$, $19 + 16 + 2 = 37$.

Die Meinung $B > C$ hat 19 Stimmen für sich, und ihr Gegentheil $C > B$, $23 + 16 + 2 = 41$.

Unter allen diesen Meinungen sind also die 3, welche die meisten Stimmen erhalten haben, $C > B$ mit 41 $C > A$ mit 37 und $B > A$ mit 35.

Dieses System der Stimmen, welches keinen Widerspruch in sich enthält, giebt bei der daraus folgenden Ordnung C B A, dem Candidaten *C* den Vorzug, der nur 18 Stimmen von 60 gehabt haben würde, wenn man nur einen einzigen Namen auf die Liste geschrieben hätte, während auf diese Art A 23 und B 19 bekommen hätte; und wenn nach der gewöhnlichen Art, wo die Wahl nach absoluter Mehrheit erfolgen soll, die Wählenden nochmals eine neue Wahl (die Ballotage) nur zwischen zwei Candidaten, welche die meisten Stimmen erhalten haben, hätten anstellen müssen, so würde *C* ausgeschlossen worden seyn. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Fehler der gewöhnlichen Wahlform mit der Zahl der Stimmenden und der der Candidaten wächst, und daß eine geringe Anzahl der Wählenden, die es unter sich verabreden, die Mehrheit zwingen können, unter zweien zu wählen, die sie zurückweisen würde, wenn sie die Freiheit dazu hätte.

§. 148.

In obigem Beispiele sind die drei Meinungen, die die meisten Stimmen haben, wie wir schon bemerkt haben, in Uebereinstimmung unter sich, und alle nothwendig, wenn man eine entscheidende Ordnung unter den Candidaten herstellen will, denn die beiden erstern lassen die Unterordnung zwischen A und B unentschieden, aber dieses ist nicht immer der Fall. Wenn z. B. bei der obigen Anzahl der Wählenden die Stimmen auf folgende Art vertheilt wären:

12 für AB*C*, 9 für A*C*B, 20 für BCA
10 für *C*AB, 9 für *C*BA,

so findet man, wenn man wie oben verfährt

$A > B$	durch 31	Wahlstimmen und	$B > A$	durch	29
$A > C$	. 21	. .	$C > A$	.	39
$B > C$	. 32	. .	$C > B$	.	28;

vergleicht man nun die Meinungen, die die meisten Stimmen haben, so kömmt man auf folgendes System

$C > A$ mit 39, $B > C$ mit 32 und $A > B$ mit 31,

wovon die beiden erstern Sätze nothwendig auf den Satz führen $B > A$ ein Resultat, das dem dritten Satze widerspricht.

Um diesen Widerspruch zu entgehen, schlägt Condorcet, der die Theorie der Wahlen mit vielem Fleiße und zu mehreren malen untersucht hat vor das Endresultat nur auf 2 Sätze zusammenzuziehen, weil diese eine nothwendige Folge haben müssen, und hierauf unter den drei Systemen, die man bilden kann, wenn man je zwei und zwei der oben angegebenen drei Sätze mit einander verbindet, denjenigen zu suchen, der die meisten Wahlstimmen hat, indem man die Stimmen vereinigt, die jeder der Sätze, aus denen er zusammengesetzt ist, erhalten hat. So findet man

71 Stimmen für	$C > A$, $B > C$	daher die Ordnung	BCA
70 "	. $C > A$, $A > B$	. . .	CAB
63 .	. $B > C$, $A > B$	. . .	ABC

demnach ist es also das erste System, für welches am stärksten gestimmt worden ist, und bei welchem man stehen bleiben muß, wenn man anders gezwungen ist, die Wahl zu beenden.*) Diese letztere Einschränkung schien Daunou sehr nothwendig, er hat gegen diese Art die Sätze zu verbinden sehr gegründete Einwürfe gemacht, und glaubt, daß in diesem zweifelhaften Falle, wo es keine streng bewiesene Mehrheit giebt, der einzige übrige Weg, wenn man die Wahl nicht aufheben kann, der sey, daß man den Candidaten nimmt, der die relative Mehrheit für sich hat.**)

---

*) Essai sur la Probabilité des Décisions Vorrede pag. 67.

**) Memoires sur les Elections pag. 63.

Zusatz des Uebersetzers.

Wie die hier zum Grunde liegende Hypothese auf die Sätze $A > B$, $C > A$ und $B > C$, und folglich zu einem Widerspruche, weil aus den ersten beiden $C > B$ folgt, führen läßt, kann auf folgende allgemeine Art dargethan werden: Es sind die Stimmen so vertheilt, daß

l	die Ordnung	ABC angeben
m	. .	ACB
n	. .	BAC
o	. .	BCA
p	. .	CAB
q	. .	CBA

So sind

$l + m + p$	Stimmen für	$A > B$
$n + o + q$	. .	$B > A$
$l + m + n$	. .	$A > C$
$o + p + q$	. .	$C > A$
$l + n + o$	. .	$B > C$
$m + p + q$	. .	$C > B$

Nun sey wirklich

1) $A > B$ also

$$l + m + p > n + o + q.$$

2) $C > A$ folglich

$$o + p + q > l + m + n.$$

Aus den Sätzen $A > B$ und $C > A$ folgt nun zwar nothwendig $C > B$, es müßte also auch

3) $m + p + q > l + n + o$ folgen,

aber dieses ist nicht absolut nothwendig. Denn die beiden Sätze

$$\begin{array}{l} 1)\ l + m + p > n + o + q \text{ und} \\ 2)\ \underline{o + p + q > l + m + n} \text{ geben blos} \\ \qquad p > n \end{array}$$

Setzt man daher $p = n + \alpha$

und nimmt zugleich an, es sey $l = o + \alpha + \beta$

so können die Sätze 1 und 2 beide bestehen, denn hierdurch folgt nur die Nothwendigkeit, daß für

$$\begin{array}{ll} N\,1 & m + 2\alpha + \beta > q \text{ und für} \\ N\,2 & q > m + \beta. \end{array}$$

Und sollte nun der 3te Satz richtig seyn, so wäre

$$\begin{array}{l} m + p + q > l + n + o \text{ und weil nach N 1} \\ \underline{l + m + p > n + o + q} \text{ so müßte} \\ \quad m + p > n + o \text{ seyn, oder} \\ \quad m + \alpha > o \end{array}$$

Sobald folglich $m + \alpha$ bei obigen Voraussetzungen nicht größer als o ist, muß die angenommene Hypothese auf einen Widerspruch leiten.

§. 149.

Die Meinungen, die in den vorhergehenden §. §. in Hinsicht auf die Anzahl der Stimmen, die sie für sich erhalten haben, verglichen worden sind, könnten auch hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeiten, wenn die der Wahrheit und des Irrthums jeder Stimme bekannt sind, verglichen werden. Z. B. eine Wahl von 33 Stimmen, von welchen 18 für $A > B$ und $A > C$, 15 für $B > A$ und $C > A$, 32 für $B > C$ und 1 für $C > B$, würde zu

der Wahl von A führen, weil $A > B$ und $A > C$ und die Wahrscheinlichkeit dieses Systems wäre,

$$\frac{v^3}{v^3 + m^3} \cdot \frac{v^3}{v^3 + m^3} \text{ (§. 131. u. 17.)}$$

aber die sehr große Mehrheit, die die Meinung $B > C$ erhalten hat, giebt in dem Falle, wenn v nur wenig größer als m ist, dem System $B > C$ und $B > A$ eine größere Wahrscheinlichkeit, obgleich die zweite Meinung nicht die meisten Stimmen für sich hat.

Denn die Wahrscheinlichkeit dieses letztern Systems ist

$$\frac{v^{31}}{v^{31} + m^{31}} \cdot \frac{m^3}{v^3 + m^3}$$

setzt man zur Abkürzung $m = \alpha v$, und bringt die Wahrscheinlichkeiten des ersten und zweiten Systems auf gleiche Benennung, so findet man für die Zähler

$$1 + \alpha^{31} \text{ und } \alpha^3 (1 + \alpha^3)$$

Ausdrücke, die 1,038 und 1,260 werden, wenn $\alpha = 0{,}9$ „also, sagt Condorcet, ist das System, welches die Stimmenmehrheit erhielt, nicht nothwendigerweise dasjenige, welches die größte Wahrscheinlichkeit hat.“ *) Indessen aber muß man nicht in allen Fällen dieses letztere System annehmen, weil oft eine von den beiden Meinungen, die nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit hat, in Widerspruch mit andern, die eine größere Wahrscheinlichkeit haben, stehen würde.

Wenn man außer dieser Schwierigkeit noch die berücksichtigt, daß die Wahrscheinlichkeit jeder Stimme sich nicht gut ausmitteln läßt, so hat man Grund genug, sich bei den Wahlen auf die Untersuchung des Wunsches der Mehr-

---

*) Essai sur la Probabilité des Decisions pag. 123.

heit zu beschränken, welches, wie man so eben gesehen hat, nicht immer so einfach ist, als man wohl glauben könnte. Man erleichtert sich das Abstimmen ungemein, wenn man die Zahl der Stimmenden vermindert. Diese Ursache in Verbindung mit andern, die hier nicht angeführt werden können, hat die Veranlassung gegeben, mehrere Grade der Wahl zu machen, um zu einer definitiven Wahl zu gelangen, nämlich zuerst Wählende zu ernennen, die ihrerseits andere wählen und so fort; allein auf diese Art vermindert sich der Einfluß des allgemeinen Willens mit jedem neuen Grade, den man der Wahl hinzufügt, und die Wahl der ausgesuchtesten Versammlung ist oft sehr verschieden, von der, welche der allgemeine Wille gemacht haben würde, wenn man ihn unmittelbar erforscht hätte. Eine ganz einfache Rechnung beweist auffallend die Wahrheit dieser Behauptung. *)

§. 150.

Als Beschluß zu den Angaben der hauptsächlichsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sollte ich nun noch von der Art reden, wie man aus verschiedenen Resultaten oder Beobachtungen das Mittlere nehmen könne, wenn man auf die verschiednen Wahrscheinlichkeiten der Irrthümer Rücksicht nimmt, oder wie die vortheilhaftesten Verbesserungen, welchen die schon sehr nahen Werthe unterworfen werden müssen, um am möglichst beßten einer großen Zahl Beobachtungen zu entsprechen, sich bestimmen lassen. Diese von Lagrange angefangene und von Euler *) verbesserte Untersuchung ist von Laplace sehr weit getrieben wor-

---

*) Siehe die Remanques de Gergonne in den Annales des Mathématiques tome VI. pag. 1.

*) Mélanges de la Société de Turin I. v. p. 167. Nova Acta Acad. Petropolitanae t. III. p. 289.

den, aber da sie sich vorzüglich auf Astronomie bezieht, so liegt sie außerhalb der Grenzen, die ich mir habe vorschreiben müssen. Ich beschränke mich blos darauf zu bemerken, daß die beßte Regel, nämlich die, die Summe der Quadrate der Fehler, welcher Art sie auch seyn mögen, auf ein Minimum zu bringen, durch Legendre auf eine sehr einfache Art gegeben worden ist.*) Was die Schätzung der Wahrscheinlichkeit des Resultats, zu welchen sie führe, anbelangt, davon findet man Aufschluß in der Théorie analytique des Probabilités.

Von der moralischen Werthbestimmung der Wahrscheinlichkeiten.

§. 151.

Wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Gegenstände angewendet, die unser Glück oder unser Leben angehen, so scheinen abstracte Zahlen wenig geeignet, uns die Wichtigkeit kennen zu lehren, die wir ihren Resultaten beimessen müssen. Wenn es aber der Zweck dieser Rechnung ist, die Eindrücke, die Furcht oder Hoffnung auf uns machen, so viel als möglich auf ein genaues Maaß zurück zu führen, so muß sie uns auch die Mittel an die Hand geben, einen Eindruck zu finden, der einem gewissen Maaße gleich kömmt. Denn die Wahrscheinlichkeiten einer Menge von Gefahren, die wir, sey es aus Noth oder aus Vergnügen zu bestehen gezwungen sind, und die uns aus Gewohnheit und allgemeiner Meinung als beständig erscheinen, können in der That als Vergleichungsmittel für diejenigen die-

*) Siehe Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites Cométes pag. 72. Seit der Publication dieser Abhandlung hat man erfahren, daß Gauß auf dieselbe Regel gekommen ist.

nen, die berechnet worden sind, von denen wir aber noch keine Erfahrung haben.

Eines sehr mäßigen Nutzens wegen unternimmt ein vernünftiger Mann eine längere oder kürzere Reise übers Meer, eine schwierige Ueberfahrt an einer gefährlichen Stelle eines Flusses und eine Menge anderer Handlungen die verschiedenen Gefahren unterworfen sind. Wenn man daher genaue Nachweisungen hätte, die das Verhältniß der Begebenheiten zu den Erfolgen finden ließen, so könnte man daraus eine Reihe von Wahrscheinlichkeiten ableiten, deren moralischer Werth durch die Wichtigkeit gemessen würde, die man den Entschlüssen zu solchen Unternehmungen beimißt. Man könnte in dieser Klasse auch die pecuniären Gefahren aufnehmen, denen sich Leute in der Hoffnung eines mehr oder minder beträchtlichen Gewinnes unterziehen, die als erfahrene und in der Führung ihrer Geschäfte weise Männer bekannt sind; da aber diese Nachweisungen fehlen, so hat man sie durch die Sterblichkeitslisten zu ersetzen gesucht. *)

Buffon hat sich deren bedient, um eine Grenze zu bestimmen, unter welche jede Wahrscheinlichkeit als Null betrachtet werden kann, §. 76.; er setzt diese Grenze auf $\frac{1}{10000}$, weil kein vernünftiger Mensch von der Furcht ergriffen wird, innerhalb einem Tage zu sterben, während welcher Zeit von 10000 Menschen einer stirbt. Daniel Bernoulli bemerkte, daß man zur genauen Bestimmung die Individuen nicht mit einschließen müsse, die krank sind oder bekannte Gründe haben, einen schnellen Todt befürchten zu müssen; und Condorcet glaubte, daß eine nothwendige und gewöhnte Gefahr nicht zur Vergleichung bei einer freiwilligen Bestimmung dienen könne, daß man überdieß sich nicht auf das einzige Maaß beschränken könne, sondern im Gegentheil eine große Anzahl erfordert würden, damit man welche zu den verschiedensten Zwecken, die man sich vor-

*) Essai sur la probabilité des décisions p. 225.

stecken kann, hätte. Diese letztere Bemerkung scheint mir die gründlichste; denn wenn wir uns für uns selbst an die Gefahr in kurzer Zeit sterben zu müssen, gewöhnen, so werden wir sie hinsichtlich andere besser schätzen, und wir setzen größeres oder geringeres Interesse auf das Leben der Person nach ihrem Alter und Gesundheitszustande.

Berechnet man also für Personen, die sich wohl befinden, die Gefahr zu sterben, in dem Zeitraume eines Jahres, eines Monats, einer Woche, eines Tages und selbst einer Stunde für verschiedne Alter, so findet man ohne Mühe die Reihe, von welcher eben die Rede war.

Die von Deparcieux angefertigte Tabelle über ausgesuchte Individuen §. 102., giebt für das Alter von 20 Jahren die Wahrscheinlichkeit

$\frac{8}{814}$ oder ungefähr $\frac{1}{100}$ in einem Jahre zu sterben,

$\frac{8}{814.12} = \frac{1}{1221}$ in einem Monate,

$\frac{8}{814.52} = \frac{1}{5291}$ in einer Woche,

$\frac{8}{814.365}$ oder ungefähr $\frac{1}{37139}$ in einem Tage

$\frac{8}{814.365.24} = \frac{1}{891330}$ in einer Stunde.

Diese Wahrscheinlichkeiten ändern sich mit dem Alter, aber nach Differenzen, die um so geringer sind, je kürzer der Zeitraum ist. Nimmt man aus derselben Tabelle die analogen Wahrscheinlichkeiten für das Alter von 50 Jahren, so findet man

$\frac{10}{581}$ in 1 Jahr, $\frac{10}{581.52}$ in einer Woche ꝛc.

Zieht man von dieser Wahrscheinlichkeit, die, welche dem Alter von 20 Jahren entspricht, ab, so ist die Differenz das Maaß für die Vermehrung, die das Alter der

Gefahr während einer Woche zu sterben, hinzufügt, eine Vermehrung, deren moralische Wichtigkeit sehr klein ist; denn ein Mann von 50 Jahren, der einer guten Gesundheit genießt, befürchtet wenig mehr als ein junger Mensch von 20 Jahren in einem kurzen Zeitraume zu sterben. Diese Gattungen der Wahrscheinlichkeiten waren es, die Condorcet vorzugsweise als Vergleichungsmaaß vorschlug. Uebrigens sind dieses auch nur Ueberblicke, die man nicht zu sehr einschränken muß; denn es ist offenbar, daß der Gegenstand keine genauen Abstufungen zuläßt, und daß der Zweck erreicht ist, wenn man der Einbildung Näherungen, die sie fassen kann, darbietet.

Zusatz des Uebersetzers.

Gibbon bemerkt gegen die Buffonsche Annahme mit Recht: „unser Muth ist mehr die Wirkung der Sorglosigkeit als des Nachdenkens. Wenn man um die Wahl eines unmittelbaren Opfers zu bestimmen eine öffentliche Lotterie ziehen, und unsern Namen auf eins von zehntausend Loosen schreiben wollte, würden wir wohl ganz ruhig seyn?" Gibbons Leben S. 277.

In der That hängt der Werth, den wir den Wahrscheinlichkeiten der Gefahren, die wir zu befürchten haben, geben zu sehr von unserer Individualität, der Erziehung, Gewohnheit und selbst der augenblicklichen Stimmung ab, als daß sich allgemeine Bestimmungen darüber festsetzen ließen. Die Wahrscheinlichkeit das Leben schnell zu verlieren ist für Schiffer, Bauhandwerker, Bergleute ꝛc. gegen die für Gelehrte, Kaufleute ꝛc. sehr groß, und doch fährt der Bergmann mit eben so wenig Furcht in den Schacht, der vielleicht schon manchen vor seinen Augen begrub, als sich der Gelehrte hinter seine stille Arbeit setzt, von der es höchst unwahrscheinlich ist, daß sie unmittelbar zu seinem Tode Anlaß gebe. Ein Mensch stürzt sich in den reißen-

den Strom einen andern zu retten, in welchen er sich sonst nicht gewagt haben würde u. s. w. Soll die Vergleichung der Wahrscheinlichkeiten der Eindrücke von Gefahren mit Nutzen zur moralischen Werthbestimmung anderer nicht erfahrner dienen, so vergesse man nicht dabei unsere Kenntniß, unsere Fähigkeit, unsern Beruf zu einem Unternehmen, und das Vertrauen auf die Hülfe der Vorsehung, das uns bei jedem guten Vorhaben stärkt, zu berücksichtigen, und so dieser Bestimmung eine im eigentlichen Sinne moralische Tendenz zu geben.

Allgemeine Uebersicht.

§. 152.

In den vorläufigen Bemerkungen, die die Einleitung zu diesem Werke ausmachen, habe ich den Begriff der Wahrscheinlichkeit aus den Gewohnheiten unseres Verstandes selbst abzuleiten, und zu zeigen gesucht, daß, da sie ihrer Natur nach auf einer Aufzählung beruht, sie auch der Rechnung, wenigstens in vielen Fällen, unterworfen werden könne. Nachdem ich die wichtigsten dieser Fälle vorgenommen habe, scheint es mir nützlich die merkwürdigsten Umstände, die sich uns dargeboten haben, zusammenzustellen, und die Uebersicht dieser Wissenschaft, die wir schon, indem von ihrem Ursprunge die Rede war, im allgemeinen angegeben haben, zu ergänzen.

Das Verhältniß der Zahl der Fälle, die ein Ereigniß hervorbringen, zu der Gesammtzahl aller Fälle, die sich ereignen können, indem man bis zu denjenigen hinabsteigt, die gleiche Möglichkeit haben, zu bestimmen, dieses ist die zu lösende Aufgabe, wenn die Ereignisse durch Verbindungen entstehen, deren Elemente gegeben und deren Art bekannt ist, wie bei den Spielen; und man bemerkt, daß in diesen Fällen die Rechnung öfters die einfachen Bemer-

kungen der gesunden Vernunft berichtigen muß, die dem verwickelten Gange der Verbindungen nicht folgen kann, wenn sich diese über eine gewisse Gränze hinaus vervielfältigen. Auch haben wir mehrere Beispiele von merkwürdigen Irrthümern gegeben. (§. 19, 23, 43.)

Die Neigung, durch welche wir veranlaßt werden, mit mehr Zutrauen das Geschehen eines Ereignisses zu erwarten, für welches wir häufiger das Urtheil der Möglichkeit als das des Entgegengesetzten wiederholen können, (§. 5.) würde bei dem Gegenstande, mit dem wir uns beschäftigen, nur Täuschung seyn, wenn die mathematische Theorie der Combinationen nicht zeigte, daß die Zahl der Urtheile, die dieser Neigung günstig sind, sich um so mehr anhäuft, je mehr Versuche man umfaßt, (§. 28.), und daß sie zu Wahrscheinlichkeiten führen, deren Größe alle Vernünftige gleich überrascht, so daß die Zeit dem Trägsten von dem überzeugen würde, was anfangs nur durch einen geübten Scharfblick begriffen werden kann; und hieraus läßt sich die geringe Zahl der Sätze ableiten, die hinreichen, um die Beweggründe, durch welche wir an Wahrscheinlichkeit zu glauben veranlaßt werden, festzustellen. (§. 36. u. 37.)*)

Dieselbe Eigenthümlichkeit der Wiederholung der Versuche führt auch zur pecuniären Werthbestimmung der Vorfälle beim Spiele, und da sie die Folgen, die nothwendigerweise selbst die geringste Ungleichheit in dem Zustande der Spieler haben müssen, vor Augen stellt (§. 64.), so zeigt sie, wie unklug es ist, sich dem Spiele hinzugeben, wenn man im Nachtheile sich befindet, und auch wenn das Spiel gleich ist, selbst nur in etwas bedeutende Summen zu wagen, da der Verlust solcher Summen uns die Mit-

---

*) Der Grund dieser verschiedenen Sätze ist in dem Urtheile enthalten: „Die Gesetze der Wahrscheinlichkeit, so zuverlässig sie im allgemeinen sind, so betrüglich sind sie im einzeln. (Gibbons Leben der deutschen Uebersetzung 1r Theil p. 276 — 277.)

tel raubt, eine lange Reihe von Versuchen auszuhalten, und also nothwendig die Gleichheit stört.

§. 153.

Die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse, die wir aus den Combinationen, die sie hervorbringen, entspringen sehen, ist es nicht allein, welche Glauben in unserm Geiste erweckt, auch die Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, deren Ursprung uns gänzlich unbekannt ist, wirkt hinsichtlich der Wiederholungen derselben auf gleiche Art auf unsern Geist. Denn wenn man das Hervorbringen dieser Begebenheiten mit dem Wurfe eines Würfels, oder dem zufälligen Zuge einer Nummer aus einer Urne vergleicht, so kann man nach dem Lehrsatze von Jacob Bernoulli schließen, daß wenn vielfältige Beobachtungen in der Folge der verschiednen Ereignisse Verhältnisse, offenbaren, die in wenig von einander entfernten Grenzen eingeschlossen sind; diese Verhältnisse, ungefähr die einfachen Wahrscheinlichkeiten anzeigen, nach welchen man auf das Künftige schließen kann. Die Wahrnehmung der Beständigkeit der Naturgesetze, auf welche wir früh durch die unzähligen Wiederholungen derselben Folgen, bei dem größten Theile der Begebenheiten, die vor unsern Augen geschehen, geleitet werden, führt schon zu dieser Bemerkung; aber es schien mir nicht unnützlich, sie aus den Entwickelungen der mathematischen Combinationen entspringen zu sehen, und was noch merkwürdiger ist, sie als mittleres Glied der unendlichen Zahl von Hypothesen zu erhalten, die über die Begebenheiten, deren Ursachen uns völlig unbekannt sind, aufgestellt werden können. (§. 81, 87.) Unter dieser letztern Form ist diese Wahrnehmung in hinlängliche, leicht zu erkennende Grenzen eingeschlossen, und zeigt, wie die Sicherheit der Erwartung sich vermindert, so wie die Ausdehnung ins Zukünftige in Verhältniß zum Vergangenen wächst. §. 85.

Das häufige Aufeinanderfolgen derselben Begebenheiten, welches auf den Gedanken einer nothwendigen Verbindung zwischen ihnen führt, giebt ein Maaß der Wahrscheinlichkeit dieser Verbindung, und giebt bis wie weit man darauf rechnen kann, selbst wenn man sonst keinen andern Grund hat, sie zu vermuthen. (§. 98. 99.) Diese Theorie verdient unsere Aufmerksamkeit, da sie ein sehr gutes Mittel giebt, dem zu weit greifenden Skepticism Einhalt zu thun, ohne zu den a priori festgesetzten Principien Zuflucht nehmen zu müssen, die wenigstens eben so zweifelhaft und dunkel sind, als das, was durch sie bewiesen werden soll.

§. 154.

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten aus der Zahl und der Art der Verbindungen, dieselbe Aufgabe, wenn nur die Beobachtungen vergangener Ereignisse gegeben sind, und endlich die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von dem Daseyn der Ursachen, oder um genauer zu reden, der natürlichen Bestrebungen Ereignisse hervorzubringen, die sich öfters als andere wiederholt haben, dieses sind die Fragen, deren Beantwortung nicht allein merkwürdig ist, weil sie viele Kenntniß der Rechnung erfordern, sondern auch, weil sie die festesten Grundlagen zu den allgemeinen Grundsätzen der Kunst zu vermuthen (de conjecturer) abgeben. *)

---

*) Die letzte dieser Fragen hat zwar im allgemeinen betrachtet die Wichtigkeit, die ihr hier beigelegt wird; nicht aber in allen ihren Anwendungen, da die Kenntniß des genauen Werthes der Wahrscheinlichkeit, daß Wirkungen eher einer Ursache als dem Zufalle zugeschrieben werden müssen, nichts über die Natur dieser Ursache enthüllt, so scheint sie durch ihre Nützlichkeit nicht dem Aufwande von Rechnung, den ihre Bestimmung erfordert zu entsprechen. Wenn die Wiederholung der Begebenheiten oder ihre Stetigkeit durch die einfachsten Mittel hin-

§. 155.

Zur Anwendung dieser Kunst gehören gegebne Stücke, und diese können ihrer Natur nach entweder der Rechnung unterworfen werden oder nicht. Die der ersten Art fehlen bei den Spielen nicht, wo sie aus den Bedingungen des Spiels und der Form der Spielwerkzeuge sich ableiten lassen. Bei den übrigen Anwendungen sind es Thatsachen, die bis jetzt nur auf sehr unvollständige Art oder nur für gewisse Klassen gesammelt worden sind. Die hauptsächlichsten aber, die der Thatsachen, welche die Dauer des menschlichen Lebens betreffen, hat sehr nützliche Unternehmungen gegründet, und diese um so sicherer, da sie auf Elemente gestützt sind, die früher beobachtet als durch Schlüsse erhalten wurden; denn wie man öfters in diesem Werke gesehen hat, waren es Hypothesen, die, um unmittelbare Beobachtungen zu ersetzen, aufgestellt wurden, durch welche Fehler in der Rechnung sich einschlichen. Die Fragen, die sich hier als die widerspenstigsten zeigen, sind ohne Widerrede die, welche auf den Willen der Menschen sich beziehen; dessen ungeachtet haben unsere Handlungen eben so nothwendige Folgen als andere Naturkräfte, und lassen Spuren, die genau untersucht, erörtert und gezählt, a posteriori ein Maaß von dem Werthe dieser Handlungen geben. Wenn hinsichtlich der Zeugnisse, der Entscheidungen, Leidenschaften die Rechnung vereiteln, so würden ihre gut beobachteten Wirkungen dennoch viel besser ihren ganzen Einfluß erkennen lassen, als alle Deklamationen, die man

---

länglich befestigt ist, so versucht man sie durch Hypothesen zu verbinden; und die Geschichte der Wissenschaften beweißt, daß man in dieser Hinsicht vom Einfachen zum Zusammengesetzten übergeht, wenn man der Ordnung der Erscheinungen folgt, so daß man zuerst, was man sieht, für das nimmt, was ist, und daß man ferner die Wirkungen auf die bezieht, welche am meisten wiederholt erscheinen.

so leicht und übrigens aus guten Absichten über einen so viel besprochenen Gegenstand führen kann.

Also können wir nicht umhin, nochmals mit allen denen, die aufrichtig die Fortschritte der Civilisation wünschen, zu wiederholen, daß man stets auf Thatsachen zurückkommen müsse; daß alles mit der Zeit sich zählen, ausmessen und folglich wenigstens größtentheils der Herrschaft der Einbildungskraft wird entziehen lassen; aber wir wollen auch sagen, daß wir dieses so wünschenswerthe Ziel nur dann erreichen können, wenn wir die größte Strenge und genaueste Zergliederung in der Klassification der Thatsachen anwenden, um jene unüberlegte und wenig genaue Associationen zu vermeiden, welche die beßten Grundsätze belasten, jene häßlichen Folgerungen, welche diesen Principien ganz und gar fremd sind, wie man nicht blos durch erörternde Untersuchungen darthun könnte, sondern auch dadurch, daß man durch die Thatsachen zeigt, daß dieselben Folgerungen eben so rechtmäßig auch den entgegengesetzten Grundsätzen beigemessen werden können.

Wenn endlich die Thatsachen fehlen, oder nicht bestimmend sind, so muß die Untersuchung, die man den Bewegungen eines oft partheiischen Enthusiasmus substituirt, durch welchen man die Menschen in allen Sinnen verwirrt, diese Untersuchung, sage ich, muß der Rechnung sehr analoge Formen annehmen. Vortheile und Nachtheile abwägen, Ausnahmen absondern, Grenzen bestimmen, ist dieses nicht eine Art Rechnung? Und wenn das Bejahende und Verneinende in gleichem Grade sich zeigt, kann man da etwas anderes thun, als im Zweifel zu bleiben, bis neue Thatsachen ihn zerstreuen?

Erste Note.

Zu §. 25. Seite 45.

1) Die Stirlingsche Formel giebt unmittelbar die Summe der Logarithmen von den Gliedern einer arithmetischen Progression. Nimmt man die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis zu irgend einer beliebigen Zahl x, so erhält man

$$\text{Log. } 1 + \text{Log. } 2 + \text{Log. } 3 \ldots\ldots + \text{Log. } x =$$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Log. } 2\pi + (x + \tfrac{1}{2})\,\text{Log. } x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{ꝛc.}$$

wo π das Verhältniß der Peripherie zum Diameter bezeichnet. Da die angegebnen Logarithmen nach dem Neperschen System genommen sind, so muß man, wenn man sich der gemeinen Logarithmen bedienen will, die Glieder, in welchen keine Logarithmen vorkommen, mit dem Modul 0,4342945 multipliciren.

Gehen wir zu den Zahlen über, und bezeichnen die Zahl 2,7182818, von welcher der Npersche Logarithmen 1 ist, mit e, so ist

$$1.2.3\ldots.x = \sqrt{2\pi} \times \frac{x^{x+1/2}}{e^x} \,.\, e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{ꝛc.}}$$

ein Produkt, in welchem der letzte Factor sich um so mehr der Einheit nähert, je größer x ist.

2) Dieses vorausgesetzt, so erhält man für das Produkt

$$p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+1) = \frac{p\,(p-1)\ldots\ldots 1}{1.2.3\ldots\ldots(p-q)},$$

den Ausdruck

$$\frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{e^p} \cdot \frac{e^{p-q}}{(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12p}} - \text{etc.}}{e^{\frac{1}{12(p-q)}} - \text{etc.}} =$$

$$\frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{e^q(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-q}\right)} - \text{etc.}$$

und theilt man diesen Ausdruck durch $1.2.3\ldots.q$, so findet man daß

$$\frac{p\,(p-1)\ldots.\,(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots q} =$$

$$\frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}.q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-q} - \frac{1}{q}\right)} - \text{etc.}$$

3) Setzt man $p = 2q$ und theilt das letztere Resultat durch 2^{2q} um das Verhältniß der Reihe vom $(1+1)^{2q}$ zu dem mittlern Gliede zu erhalten, so findet man

$$\frac{(2q)^{2q+\frac{1}{2}}}{2^{2q}\sqrt{2\pi}.q^{2q+1}} \times$$

$$e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2q} - \frac{2}{q}\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{8q^3} - \frac{2}{q^3}\right) + \text{etc.}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi q}} \cdot e^{-\frac{1}{8q} + \frac{1}{192q^3} - \text{etc.}}$$

und nimmt man $2q = 100$, so ergiebt sich hieraus die Seite 46 angeführte Zahl 0,0795892.

So wie q größer wird, nähert sich der obige Ausdruck dem Werthe von

$$\frac{1}{\sqrt{\pi q}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi q}} = \sqrt{\frac{2}{\pi p}},$$

immer mehr und mehr, also einer Größe, die immer kleiner wird.

4) Setzt man $p = rm + rn$, $q = rn$ um das größte Glied der Reihe von $(m+n)^{rm+rn}$ zu erhalten (§. 27.), so findet man zuerst den Coefficienten =

$$\frac{(rm+rn)^{rm+rn+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}.(rn)^{rn+\frac{1}{2}}(rm)^{rm+\frac{1}{2}}} \times$$

$$e^{\frac{1}{12r}\left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)} - \text{etc.}$$

$$= \frac{(m+n)^{rm+rn+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\pi rmn)}.m^{rm}n^{rn}} \times e^{\frac{1}{12r}\left\{\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right\}} - \text{etc.}$$

und multiplicirt man nun diesen letzten Werth mit $\frac{m^{rm}n^{rn}}{(m+n)^{rm+rn}}$ so erhält man

$$\sqrt{\left\{\frac{m+n}{2\pi rmn}\right\}} \;.\; e^{\frac{1}{12r}\left\{\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right\}} - \text{etc.}$$

als das Verhältniß der Reihe von $(m+n)^{rm+rn}$ zu dem größten Gliede derselben.

5) Das Verhältniß zweier beliebigen Glieder der Reihe von $(m+n)^p$, in welchen $m^{p-q}n^q$ und $m^{p-q'}n^{q'}$ vorkömmt, wird, wenn man die exponentiellen Reihen, die leicht wieder ergänzt werden können, unbeachtet läßt, ausgedrückt durch

$$\frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{q'^{q'+\frac{1}{2}}(p-q')^{p-q'+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n^{q-q'}}{m^{q-q'}}$$

$$= \frac{q'^{q'+\frac{1}{2}}(p-q')^{p-q'+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n^{q-q'}}{m^{q-q'}}$$

6) Es sey $p = rm + rn$, $q = rn$, $q' = rn - r$; so wird obiger Ausdruck

$$\frac{r^{rm+rn+1}(n-1)^{rn-r+1/2}(m+1)^{rm+r+1/2}}{r^{rm+rn+1}\, n^{rn-r+1/2}\, m^{rm+r+1/2}} =$$

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}^{rn-r+1/2} \left\{\frac{m+1}{m}\right\}^{rm+r+1/2}$$

ein Resultat, das durch seine Form merkwürdig ist, und von welchem der numerische Werth zu gleicher Zeit mit der Zahl r eines Wachsthums ins Unendliche fähig ist, wodurch also die Behauptung §. 31. bewiesen ist.

Um sich davon zu überzeugen, ist es hinreichend zu bemerken, daß

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}^{rn-r} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}^{r(n-1)} = e^{r(n-1)\,\text{Log.}\left\{\frac{n-1}{1}\right\}}$$

$$\left\{\frac{m+1}{m}\right\}^{rm+r} = \left\{\frac{m+1}{m}\right\}^{r(m+1)} =$$

$$e^{r(m+1)\,\text{Log.}\left\{\frac{m+1}{m}\right\}},$$

$$\text{Log.}\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \text{Log.}\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \text{ꝛc.}$$

$$\text{Log.}\left\{\frac{m+1}{m}\right\} = \text{Log.}\left\{1 + \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} - \text{ꝛc.}$$

und diese giebt

$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}^{rn-r} \left\{\frac{m+1}{m}\right\}^{rm+r} =$$

$$e^{r\left\{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6m^2} + \frac{1}{6n^2} + \text{ꝛc.}\right\}};$$

da die Reihe, die mit r in dem letztern Ausdrucke multiplicirt wird, convengirend und immer positiv ist, so folgt, daß der Werth dieses Ausdrucks immerwährend mit der Zahl r wächst, und daß folglich derselbe Fall statt findet bei dem Ausdrucke

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{rn-r+1/2}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{rm+r+1/2} =$$

$$\left\{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{m+1}{m}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{n-1}{n}\right\}^{rn-r}\left\{\frac{m+1}{m}\right\}^{rm+r}.$$

Setzte man $q' = rn + r$, was $p - q' = rm - r$ geben würde, so würde dadurch in dem oben erhaltenen Verhältnisse nichts geändert, als daß m an die Stelle von n zu stehen käme, und umgekehrt.

7) Setzt man in dem Ausdrucke für den Coefficienten des allgemeinen Gliedes der Reihe von $(m+n)^p$ (in Nr. 2. der gegenwärtigen Note) $p = rm + rn$, $q = rn - q'$ und daher $p - q = rm + q'$, und man multiplicirt ihn mit $\frac{m^{rm+q'}n^{rn-q'}}{(m+n)^{rm+rn}}$, so wird derselbe

$$\frac{(rm+rn)^{rm+rn+1/2}}{\sqrt{2\pi}.(rn-q')^{rn-q'+1/2}(rm+q')^{rm+q'+1/2}} \times$$

$$e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{rm+rn}-\frac{1}{rm+q'}-\frac{n}{rn-q'}\right\}-\text{ꝛc.}}$$

$$\times\ \frac{m^{rm+q'}n^{rn-q'}}{(m+n)^{rm+rn}}$$

und wir wollen ihn vereinfachen, dadurch, daß wir q' in Verhältniß zu den Zahlen rm und rn äußerst klein annehmen. Der erste Factor läßt sich leicht auf die Form bringen

$$\frac{(m+n)^{rm+rn+1/2}}{\sqrt{2r\pi} \cdot n^{rn-q'+1/2}\, m^{rm+q'+q'+1/2}} \times$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{q'}{rn}\right)^{rn-q'+1/2}\left\{1+\frac{q'}{rm}\right\}^{rm+q'+1/2}};$$

verrichtet man nun die Multiplication mit dem 3ten Factor und reducirt, so erhält man

$$\frac{\sqrt{\left\{\frac{m+n}{2\pi rmn}\right\}}}{\left\{1-\frac{q'}{rn}\right\}^{rn-q'+1/2}\left\{1+\frac{q'}{rm}\right\}^{rm+q'+\frac{1}{2}}}$$

Bedenkt man ferner daß

$$\left\{1-\frac{q'}{rn}\right\}^{rn-q'+\frac{1}{2}} = e^{(rn-q'+\frac{1}{2})\,\text{Log.}\,(1-\frac{q'}{rn})};$$

$$\left\{1+\frac{q'}{rm}\right\}^{rm+q'+\frac{1}{2}} = e^{(rm+q'+\frac{1}{2})\,\text{Log}\,(1+\frac{q'}{rm})};$$

entwickelt die Exponenten von e und nimmt ihre Summe, so findet man nach den Reductionen

$$-\frac{q'}{2rn}+\frac{q'}{2rm}+\frac{q'^2}{2rn}+\frac{q'^2}{2rm}+ \text{etc.}$$

und nimmt man die Zahl q hinlänglich klein in Verhältniß zu den Zahlen rm und rn, daß nur noch das Quadrat derselben mit ihren ersten Potenzen in Vergleich zu ziehen ist, so reducirt sich dieser Ausdruck auf die Glieder

$$\frac{q'^2}{2rn}+\frac{q'^2}{2rm};$$

woraus sich endlich ergiebt

$$\sqrt{\left\{\frac{m+n}{2\pi rmn}\right\}} \cdot e^{\frac{-q'^2}{2r}\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right\}} =$$

$$\sqrt{\left\{\frac{m+n}{2\pi rmn}\right\}} \cdot e^{-\frac{m+n}{2rmn}q'^2}$$

ein Ausdruck, der einen Näherungswerth für das Verhältniß des Gliedes, in welchem $m^{rm+q'}n^{rn-q'}$ vorkömmt, und der Potenz $(m+n)^{rm+rn}$ giebt, wenn man die exponentielle Reihe, die den 2ten Factor des zum Grunde gelegten Ausdrucks bildet unbeachtet läßt, und nur noch q'^2 als mit den ersten Potenzen der Zahlen rm und rn vergleichbar denkt.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem des Verhältnisses zwischen der Reihe von $(m+n)^{rm+rn}$ und dem größten Gliede derselben (Nr. 4. dieser Note), so sieht man daß

$$e^{\frac{m+n}{2rmn}q'^2}$$

ein Ausdruck ist, der sich dem Quotienten nähert, welcher erhalten wird, wenn man das größte Glied durch das theilt, in welchem $m^{rm+q'}n^{rn-q'}$ vorkömmt; und setzt man $m=18$, $n=17$, $rm+rn=14000$, also $r=400$, $q'=163$, so beträgt derselbe 44,7, was nicht auffallend von dem Werthe verschieden ist, den Nicolaus Bernoulli in der Seite 199 angeführten Abhandlung gefunden hat, und woraus er folgerte, daß die Summe der 163 Glieder die dem größten der Reihe von $(m+n)^{14000}$ vorhergehen, und der 163 die ihm folgen, zu den übrigen Gliedern der Reihe in einem größern Verhältniß, als das von 43,58 zu 1 sich befinde.

Man kann zu diesem Resultate auch mittelst der Bemerkungen gelangen, die §. 32. gemacht worden sind;

denn wenn man annimmt, daß jede der Gruppen, welche von M bis L sich bilden, aus q′ Glieder zusammengesetzt sey, und bezeichnet sie durch g, g′, g″ ꝛc., so erhält man

$$\frac{M}{L} < \frac{g}{g'}, \frac{g}{g'} < \frac{g'}{g''} \text{ ꝛc.}$$

Setzt man daher $\frac{M}{L} = k$, so ist

$$g' < \frac{g}{k}, g'' < \frac{g'}{k} \text{ oder } < \frac{g}{k^2}, g''' < \frac{g''}{k} \text{ oder } \frac{g}{k^3} \text{ ꝛc.}$$

und folglich

$$g' + g'' + g''' + \text{ꝛc.} < \left\{ \frac{g}{k} + \frac{g}{k^2} + \frac{g}{k^3} + \text{ꝛc.} \right\} < \frac{g}{k-1};$$

und dieses gilt, so groß auch die Anzahl der Gruppen ist; daher wird endlich die Gruppe g zu der Summe aller übrigen in einem größern Verhältniß als $k - 1 : 1$ stehen.

8) Man kann noch kürzer den Werth, der dem Verhältnisse zwischen der Gruppe von Gliedern, die durch g bezeichnet ist, und der ganzen Reihe von $(m+n)^p$ nahe kömmt finden, wenn man die Summe der Werthe sucht, die der Ausdruck

$$\sqrt{\left\{\frac{m+n}{2\pi rmn}\right\}} \cdot e^{-\frac{m+n}{2rmn} q'^2}$$

von $q' = 0$ bis zu der Zahl, die als der größte Werth angegeben ist, erhält, und zwar mittelst der summatorischen Reihe, die Euler in seiner Differentialrechnung angegeben hat. Diese Formel, welche heißt

$$Su = \int u\,dx + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{12}\frac{du}{dx} + \text{etc.}$$

giebt, wenn man $x = q'$, $u = be^{-aq'^2}$ + etc.

$$Sbe^{-aq'^2} = b\int e^{-aq'^2}dq' + \tfrac{1}{2}be^{-aq'^2} -$$

$$\tfrac{1}{6}baq'e^{-aq'^2} + \text{etc.}$$

Aber man kann sich auf die beiden ersten Glieder beschränken, wenn ba sehr klein ist, wie dies bei dem gegenwärtigen Beispiele der Fall ist, da

$$a = \frac{m+n}{2rmn},\ b = \sqrt{\left\{\frac{m+n}{2\pi rmn}\right\}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Setzt man hiernach $q'\sqrt{a} = t$, so erhält man den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}dt + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,.\,e^{-t^2}$$

den man von $t = 0$ bis zu dem größten Werthe von t nehmen und verdoppeln muß, wenn man die Gruppe, die dem größten Gliede vorhergeht, mit derjenigen, die ihm folgt, vereinigen will, worauf man dieses Glied selbst hinzufügt. Ich werde in der 3ten Note auf das angezeigte Integral zurück kommen.

Man kann aus diesen Formeln eine Erklärung des Satzes §. 30. ableiten, aber die von Jacob Bernoulli verdient den Vorzug, nicht blos weil sie einfacher ist, sondern auch weil man bei ihr den Gang der Rechnung besser einsieht, als bei obiger Rechnung, welche auf Reihen sich stützt, die in ihrer ganzen Ausdehnung nicht convergirend sind, und wo man viele Größen vernachlässigt, so daß es nicht leicht scheint, den Einfluß derselben auf das Resultat genau auszugleichen.

Beim Beschluß dieser Note will ich noch bemerken, daß die Summation des mittlern Theils der Glieder von den höhern Potenzen eines Binoms auf endliche Integrale

zurückgeführt worden ist, durch Laplace in den Memoires de l'Académie des Sciences Jahrg. 1782. p. 60. und durch Legendre in den Exercices de Calcul intégral V. Thl. p. 235.

Zu §. 85. Seite 183.

1) Wenn man die Stirlingsche Formel bei dem Ausdrucke $S_1^{(m,n)}$ §. 83. anwendet, so findet man, wenn die exponentielle Reihe unbeachtet bleibt

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)} =$$

$$\sqrt{2\pi}.\frac{m^{m+1/2}n^{n+1/2}}{e^m\,.\,e^n}\,.\,\frac{e^{m+n+1}}{(m+n+1)^{m+n+3/2}} =$$

$$e\sqrt{(2\pi mn)}.\frac{m^m n^n}{(m+n+1)^{m+n+3/2}}.$$

Der letztere dieser Ausdrücke läßt sich um vieles vereinfachen, wenn man bedenkt, daß sobald p in Verhältniß zu den Zahlen k und l sehr groß ist, man beinahe erhält

$$\left\{1+\frac{k}{p}\right\}^{p+l} = e^k$$

weil

$$\left\{1+\frac{k}{p}\right\}^{p+l} = \left\{1+\frac{k}{p}\right\}^p . \left\{1+\frac{k}{p}\right\}^l =$$

$$\left(1+\frac{p}{1}.\frac{k}{p}+\frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{k^2}{p^2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}.\right.$$
$$\left.\frac{k^3}{p^3}+ \text{ꝛc.}\right)\times$$
$$\left\{1+\frac{l}{1}.\frac{k}{p}+\frac{l(l-1)}{1.2}.\frac{k^2}{p^2}+\frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}.\frac{k^3}{p^3}\right.$$
$$\left.+ \text{ꝛc.}\right)$$

und wenn man zu den Grenzen der verschiednen Glieder dieser Reihen übergeht, indem man p unendlich annimmt, so wird die erstere

$$1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} = e^k$$

und die zweite reducirt sich auf ihr erstes Glied 1.

Durch dieses Mittel verwandelt sich die Größe

$$(m+n+1)^{m+n+\frac{3}{2}} =$$

$$(m+n)^{m+n+\frac{2}{3}}\left(1+\frac{1}{m+n}\right)^{m+n+\frac{3}{2}}$$

in $(m+n)^{m+n+\frac{3}{2}}e$; der Werth von $S_1^{(m,n)}$ wird daher

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n+1}} \sqrt{\left\{\frac{2mn\pi}{m+n}\right\}}$$

wie man in den Exercices de Calcul intégral par Legendre 3ten Thl. p. 348 ersehen kann; und er bemerkt mit Recht, daß die Näherung voraussetzt, die Zahlen m und n seien beide sehr groß.

2) Man findet auf gleiche Art, daß

$$S_1^{(m+p-q,\ n+q)} =$$

$$\frac{(n+q)(n+q-1)\ldots\ldots 1}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots(m+n+p+1)} =$$

$$\sqrt{2\pi}.\frac{(m+p-q)^{m+p-q+\frac{1}{2}}(n+q)^{n+q+\frac{1}{2}}}{e^{m+p-q}.e^{n+q}} \times$$

$$\frac{e^{m+n+p+1}}{(m+n+p+1)^{m+n+p+\frac{3}{2}}};$$

und da man annimmt, daß die Zahlen m und n in Verhältniß zu den Zahlen p und q sehr groß sind, so kann man den Ausdruck

$$(m+p-q)^{m+p-q+\frac{1}{2}} =$$

$$m^{m+p-q+\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{p-q}{m}\right\}^{m+p-q+\frac{1}{2}}$$

auf $m^{m+p-q+\frac{1}{2}}e^{p-q}$ reduciren, und eben so die übrigen, es ergiebt sich hieraus

$$\sqrt{(2\pi)}.\frac{m^{m+p-q+\frac{1}{2}}n^{n+q+\frac{1}{2}}}{(m+n)^{m+n+p+\frac{3}{2}}}$$

ein Werth der durch den eben erhaltenen Werth von $S_1^{(m,n)}$ getheilt, den Quotienten giebt

$$\frac{m^{p-q}n^q}{(m+n)^p}.$$

Auf diese Art ungefähr hat Laplace in dem VI. Bde. der Memoires des Savans Etrangers p. 625. die zu Ende des §. 85. aufgestellte Behauptung bewiesen.

Zweite Note.

Zu §. 43. Seite 74.

Die Rechnung mit (endlichen) Differenzen, woran sich die Theorie der Combinationen natürlich anknüpft, dient häufig zur leichten Auffindung der Gleichung für Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Schon Moivre, indem er das Gesetz aufsuchte, welches die aufeinander folgenden Werthe der Functionen die zur Auflösung dieser Aufgaben dienen, befolgen, gebrauchte die Untersuchung der wiederkehrenden Reihen; aber der Algorithmus der Rechnung mit Differenzen war noch nicht vollständig und die Integration der Gleichungen dieser Art war noch nicht auf eine so deutliche Art auseinander gesetzt, als durch Lagrange 1759.*) Moivre konnte nicht unmittelbar zu dem endlichen Ausdrucke der zu bestimmenden Functionen gelangen. Laplace war es, der zuerst im Jahre 1773 eine deutliche Anwendung der Rechnung mit Differenzen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht hat; und Lagrange, der schon 1759 diese Anwendung anzeigte, lößte, nachdem er diese Rechnung im Jahre 1775 wieder vornahm, mittelst derselben die wichtigsten und schwersten Fragen, die Moivre in der Doctrine of chances behandelt hat.**) Ich kann hier nur einen Begriff von dieser Methode beibringen, und

*) Miscellanea Taurinensia Tom. I. pag. 33.

**) Mémoire des Savans Etrangers tom. VII. 1773. p. 113. Mémoires de l'Academie de Berlin 1775. pag. 240.

will sie zuerst auf die Frage des oben angeführten §. anwenden.

Wir wollen die Zahl der ungeraden Combinationen, die bei m Stücken vorkommen können, durch I_m bezeichnen, und durch P_m die der geraden Combinationen, und wollen suchen, was aus diesen Functionen von m wird, wenn die veränderliche Größe sich um die Einheit vermehrt. Es ist augenscheinlich, daß wenn ein neues Stück zu den geraden Combinationen hinzukömmt, diese hierdurch ungerade werden, und überdies bildet dieses Stück allein genommen ebenfalls eine ungerade Combination, man erhält folglich $P_m + 1$ ungerade Combinationen außer den I_m, die schon bei m Stücken vorkommen. Was die ungeraden Combinationen anbelangt, sie werden durch das Hinzukommen des neuen Stückes gerade die Zahl der Combinationen dieser Art, welche P_m war, wird daher um I_m vermehrt; da nun I_{m+1} und P_{m+1} die neuen Werthe der Funktionen I_m und P_m sind, so ergeben sich die Gleichungen

$$I_{m+1} = I_m + P_m + 1, \quad P_{m+1} = P_m + I_m.$$

Mittelst der zweiten Gleichung wird die erste

$$I_{m+1} = P_{m+1} + 1$$

und vermindert man m um eine Einheit, so ist

$$I_m = P_m + 1;$$

und man kann nun $P_m + 1$ aus der ersten Gleichung wegschaffen, wodurch erhalten wird

$$I_{m+1} = 2\, I_m$$

eine Gleichung vom ersten Grade und von der ersten Ordnung der beständigen Coefficienten, und welcher genüge geleistet wird, wenn man $I_m = A\alpha^m$ setzt. Der Coefficient A bleibt willkührlich, und man findet $\alpha = 2$, daher $I_m = 2^m A$; da aber I_m auf 1 sich reduciren muß, wenn

$m = 1$ ist, so muß $A = \frac{1}{2}$ seyn; man hat daher $I_m = 2^{m-1}$ und folglich $P_m = I_m - 1 = 2^{m-1} - 1$, woraus man die Wahrscheinlichkeiten folgern kann

$$\frac{I_m}{I_m + P_m} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}, \quad \frac{P_m}{I_m + P_m} = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1}$$

wie in §. 43.; nur mit dem Unterschiede, daß die Analyse zeigt, woher es kömmt, daß die Anzahl der ungeraden Combinationen, die der geraden um die Einheit übersteigen muß, was von Moivren, der sich zuerst mit dieser Aufgabe beschäftigte,*) nicht bemerkt worden ist.

2) Die vorhergehende Frage hieng von einer Gleichung mit Differenzen mit 2 veränderlichen Größen ab; aber man kömmt häufig auf Gleichungen mit partiellen Differenzen; die Ausmittlung der Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine gegebne Anzahlmal bei einer bestimmten Anzahl von Versuchen ein bezeichnetes Ereigniß hervorzubringen, kann hier als Beispiel dienen. Dieses ist die erste Aufgabe, die Lagrange in der angeführten Abhandlung gelößt hat; er gelangte auf folgende Art zu der Gleichung. Er nahm nach dem Beispiele von Montmort die Umstände des Spielers, nämlich seine mathematische Hoffnung, für unbekannt an; aber er setzte die zu hoffende Summe der Einheit gleich, wodurch die Umstände des Spielers auf die Wahrscheinlichkeit, die er zu gewinnen hat, reducirt werden. Nach dieser Erklärung stützt er sich auf den Grundsatz, daß die Umstände eines Spielers in Beziehung auf einen beliebigen Wurf, aus der Vereinigung der verschiednen Resultate besteht, die dieser Wurf herbeiführen kann, mit der Wahrscheinlichkeit sie zu erhalten multiplicirt. Kömmt es z. B.

*) Mémoires de l'Academie des Sciences, 1728. p. 53. de l'Histoire.

darauf an, in zwei Würfen mit einem gewöhnlichen Würfel, wenigstens einmal die 6 zu werfen, so sind vor dem Spiele die hierauf Bezug habenden Umstände des Spielers aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ beim ersten Wurf die Summe 1 zu gewinnen, und aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ bei diesem Wurfe nicht zu gewinnen, aber bei dem zweiten Wurfe die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zu haben, daß er die Summe 1 gewinnen werde, zusammengesetzt; und dieses beträgt zusammen.

$$\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{11}{36}$$

wie man nach der Formel $(\frac{1}{6}+\frac{5}{6})^2$ §. 20. findet. Dieses vorausgesetzt, so ergiebt sich, wenn man durch $y_{x,t}$ die Umstände des Spielers bezeichnet, sobald er nur noch x Versuche zu machen hat, und ihm noch t Wiederholungen des bezeichneten Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit e ist, fehlen, die Gleichung

$$y_{x,t} = e\,y_{x-1,t-1} + (1-e)\,y_{x-1,t},$$

wo $y_{x-1,t-1}$ die Umstände des Spielers bei dem folgenden Wurf bezeichnet, wenn er das verlangte Ereigniß getroffen hat, und $y_{x-1,t}$ wenn er es nicht getroffen hat.

Um diese Gleichung mit partiellen Differenzen mit drei veränderlichen Größen zu integriren, muß ich auf die Abhandlung von Lagrange oder auf den 3ten Theil der Traite du Calcul differentiel et du Calcul intégral (in 4to) verweisen, und ich beschränke mich hier den Werth von $y_{x,t}$ anzugeben, der auf folgende Art abgeleitet wird

$$y_{x,t} = e^t \Big\{ 1 + \frac{t}{1}(1-e) + \frac{t(t+1)}{1.2}(1-e)^2 + \ldots\ldots \frac{t(t+1)\ldots.(t+(x-t-1))}{1.2.3\ldots.(x-t)}(1-e)^{x-t} \Big\}.$$

Ist nun $x = p$, $t = r$, $1 - e = f$, so folgt

$$y_{p,r} = e^r \left\{ 1 + \frac{r}{1} f + \frac{r(r+1)}{1.2} f^2 + \text{etc.} \right\}$$

als Wahrscheinlichkeit, bei p Versuchen, wenigstens r mal ein bezeichnetes Ereigniß zu treffen.

Setzt man in der Formel §. 22. $p - q = r$ und nimmt e^r als gemeinschaftlichen Factor, so findet man

$$e^r \left\{ e^{p-r} + \frac{p}{1} e^{p-r-1} f + \frac{p(p-1)}{1.2} e^{p-r-2} f^2 + \text{etc.} \right\}$$

und substituirt man die Potenzen von $1 - f$ statt der von e innerhalb der Klammern, so kömmt man auf obige Formel, die Moivre durch Induction gefunden hat. *)

Zu §. 54. Seite 110.

Folgendes ist die Auseinandersetzung der Auflösung, die Laplace von derselben Aufgabe in der Téorie analytique des Probabilités Seite 191 gegeben hat. Behält man die §. 54. eingeführte Benennung bei, so kann bei einer Ziehung irgend eine der

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots\ldots i}$$

Anordnungen der m Nummern je i genommen, vorkommen; die Liste der n Ziehungen wird daher aus n dieser Anordnungen bestehen, die in allen betragen

$$\left\{ \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-i+1}{1.2\ldots\ldots i} \right\}^n$$

und wird im Ganzen in Nummern enthalten. Es sey

*) Doctrine of Chances pag. 15.

nun $z_{m,q}$ die Anzahl dieser Anordnungen, in welchen keine der Nummern 1, 2, 3, ...q fehlt, $Z_{m,q-1}$ die Zahl der Anordnungen, wo keine der Nummern 1, 2, 3, ...q — 1 fehlt; die Anzahl dieser letztern muß augenscheinlich die der erstern übersteigen, weil zu diesen letztern außer den Anordnungen, die die Nummern 1, 2, 3.... q — 1 mit der Nummer q verbunden enthalten, auch die gehören, wo q fehlt, und welche also keinen Theil von $z_{m,q}$ machen. Aber die Anordnungen, wo die Nummer q fehlt, können aus einer Lotterie sich ergeben, die nur aus m — 1 Nummern zusammengesetzt ist, ihre Anzahl wird ausgedrückt durch $z_{m-1,q-1}$, man erhält daher die Gleichung

$$z_{m,q} = z_{m,q-1} - z_{m-1,q-1} = \Delta z_{m-1,q-1}$$

wo die Differenz Δ blos in Beziehung zu m genommen ist.

Statt diese Gleichung zu integriren, kann man sich ihrer bedienen, um nach und nach aus $z_{m,1}$ die Werthe von $z_{m,2}$, $z_{m,3}$ etc. abzuleiten, denn sie giebt

$$z_{m,2} = z_{m,1} - z_{m-1,1} = \Delta z_{m-1,1}$$
$$z_{m,3} = z_{m,2} - z_{m-1,2} = \Delta z_{m-1,2} = \Delta^2 z_{m-2,1}$$
$$z_{m,4} = z_{m,3} - z_{m-1,3} = \Delta z_{m-1,3} = \Delta^3 z_{m-3,1}$$

....

woraus man leicht folgert

$$z_{m,q} = \Delta^{q-1} z_{m-q+1,1}.$$

Nun ist aber $z_{m,1}$ oder die Anzahl der Anordnungen, in welchen die Nummer 1 nicht fehlt, der Gesammtzahl der Anordnungen gleich, die die vorausgesetzte Lotterie zuläßt, weniger der Anzahl derjenigen, die aus einer Lotterie sich ergeben, die nur aus den m — 1 übrigen Nummern außer 1 besteht, und folglich nach dem, was zu Anfang dieses Abschnitts bemerkt worden ist:

$$\left\{\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}\right\}^n - \left\{\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-i)}{1.2.3\ldots i}\right\}^n$$

$$= \frac{\Delta.[(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i)]^n}{(1.2.3\ldots.i)^n}$$

verwechselt man daher in diesem Ausdrucke m in $m-q+1$ um es in dem oben gefundenen Ausdrucke von $z_{m,q}$ zu substituiren, so erhält man

$$z_{m,q} = \frac{\Delta^q[(m-q)(m-q-1)\ldots.(m-i-q+1)]^n}{(1.2.3\ldots.i)^n}$$

wobei man nicht vergessen darf, daß die angezeigte Differenz sich nur auf m bezieht.

Man kann der Kürze wegen $m-q=s$ setzen; dieses giebt

$$z_{m,q} = \frac{\Delta^q[s(s-1)\ldots.(s-i+1)]^n}{(1.2.3\ldots..i)^n},$$

was in Beziehung auf s zu differenciren ist, setzt man hierauf $s=0$, wenn man $q=m$ setzen will, um die Zahl der Anordnung zu erhalten oder die Listen, nach welcher alle Nummern herausgekommen sind, so wird die verlangte Wahrscheinlichkeit ausgedrückt durch

$$\frac{z_{m,q}}{\left\{\frac{m(m-1)\ldots..(m-i+1)}{1.2.3\ldots..i}\right\}^n}$$

$$= \frac{\Delta^q[s(s-1)\ldots.(s-i+1)]^n}{[m(m-1)\ldots.(m-i+1)]^n}.$$

Zu §. 59 Seite 123.

Die Aufgabe von der Dauer der Spiele, die mit gegenseitigem Aufheben gespielt werden, läßt sich in ihrer allgemeinsten Bedeutung auf folgende Art ausdrücken: Zwei

Spieler, von welchen jeder eine bestimmte Anzahl Marken hat, spielen unter der Bedingung mit einander, daß derjenige, der eine Partie verliert, dem andern eine Marke zahlen muß; es soll ausgemittelt werden, wieviel man wetten kann, daß das Spiel, das aus unendlich vielen Partien bestehen kann, nach einer gewissen Anzahl von Partien zu Ende seyn wird, so daß der eine von beiden Spielern alle Marken des andern gewonnen haben wird (p. 269. der Abhandlung von Lagrange)? Er bringt diese Aufgabe auf folgende Art in eine Gleichung. Bezeichnet man durch x die Zahl der Partien, die noch zu spielen sind, durch t die Zahl der Marken, welche der eine Spieler noch besitzt, so hat man, nachdem zu Anfang dieser Note angeführten Grundsatz, da $y_{x,t}$ die Umstände dieses Spielers und e die Wahrscheinlichkeit die Partie zu gewinnen ausdrücken,

$$y_{x,t} = e y_{x-1,t+1} + (1-e) y_{x-1,t-1}$$

dieselbe Gleichung, wie die der Aufgabe VI von Lagrange (p. 261. seiner Abhandlung), wo er nur einen einzigen Spieler berücksichtigt, welcher wettet ein bestimmtes Ereigniß entweder b mal mehr oder c mal weniger als das entgegengesetzte zu treffen. Nach den obigen Angaben bedeutet b die Anzahl der Marken, die der zweite Spieler hat, c die des ersten Spielers, und das Spiel ist zu Ende wenn x der Null gleich wird, $t = c + b$, wodurch der erste Spieler gewinnt, oder $t = 0$, wodurch der zweite gewinnt.

Wenn von beiden Spielern jeder gleich viele Marken hat, und $e = \frac{1}{2}$, so wird die Aufgabe der gleich seyn, von welcher ich die einfachsten Fälle in dem angeführten §. angegeben habe.

Dritte Note.

Zu §. 70. Seite 145.

Bezeichnet man den Anwachs des Kapitals mit dx, so erhält man augenblicklich $\frac{k\,dx}{x}$ als Maaß der Wichtigkeit dieses Anwachses; und wenn man integrirt, so ist dieselbe

$$k\,\mathrm{Log.}\,x + \mathrm{Const.}$$

und bestimmt man die Constante so, daß das Resultat verschwindet, wenn $x = a$, so erhält man

$$k(\mathrm{Log.}\,x - \mathrm{Log.}\,a) = k\,\mathrm{Log.}\,\frac{x}{a}.$$

Zu §. 82, Seite 173.

1) Drückt man durch dx die Theile aus, in welche man annimmt, daß die Einheit getheilt sey, so wird die gesuchte Summe ausgedrückt werden durch

$$\int x^m dx (1-x)^n.$$

Die theilweise Integration auf den Factor $x^m dx$ angewendet, giebt zuvörderst

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1}\int x^{m+1}dx(1-x)^{n-1};$$

wiederholt man dieses Verfahren n mal, so verschwindet der Factor $1-x$ und man erhält die Formel Seite 177.

Die im Texte durch

$$S_b^{(m,n)} - S_a^{(m,n)}$$

bezeichnete Formel ist dem Integrale gleich

$$\int x^m dx(1-x)^n$$

von $x=a$ bis $x=b$ genommen; und die Wahrscheinlichkeit bei einer Anzahl von p neuen Versuchen, $p-q$ Ereignisse A und q Ereignisse B zu erhalten (§. 85.) wird seyn

$$\frac{p(p-1)\ldots\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots q} \times \frac{\int x^{m+p-q}dx(1-x)^{n+q}}{\int x^m dx(1-x)^n}$$

wo die Integrale von $x=0$ bis $x=1$ genommen werden müssen.

2) Die Betrachtung der mittlern Werthe (§. 87.) führt ganz einfach zu Integralien; denn da dx der Anwachs der Werthe von x ist, so beträgt die Anzahl dieser in der Einheit enthaltenen Werthe $\frac{1}{dx}$, und der mittlere Werth von allen, die die Function $x^m(1-x)^n$ in diesem Intervalle einnimmt, wird der Summe der aufeinander folgenden Werthe dieser Function durch $\frac{1}{dx}$ getheilt, gleich seyn, also

$$\frac{\int x^m(1-x)^n}{\frac{1}{dx}} = \int x^m dx(1-x)^n.$$

Sonach wird die Wahrscheinlichkeit eines neuen Ereignisses A und die eines neuen Ereignisses B

$$\frac{\int x^{m+1} dx (1-x)^n}{\int x^m dx (1-x)^n}, \quad \frac{\int x^m dx (1-x)^{n+1}}{\int x^m dx (1-x)^n};$$

und man sieht leicht ein, daß ihre Summe der Einheit gleich ist, da alle diese Integrale innerhalb derselben Grenzen $x=0$ und $x=1$ genommen sind.

Wir wollen hier im Vorbeigehen bemerken, daß im allgemeinen

$$\frac{\int y dx}{b-a}$$

das Integrale von $x=a$ bis $x=b$ genommen, den mittlern Werth zwischen allen denen ausdrückt, die die Ordinate y einer Curve von der Abscisse a an bis zur Abscisse b erhalten kann.

Zu §. 93 Seite 196.

1) Nach den Begriffen der Integralrechnung wird die im gegenwärtigen §. angegebne Wahrscheinlichkeit durch den Werth des Ausdrucks von dem Integrale $\int x^m dx (1-x)^n$ zwischen den Grenzen $x=a$, $x=b$, durch den Werth zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ getheilt, ausgedrückt. Da dieser letztere aber in der Note I. (Zusatz zu §. 85.) schon gefunden worden ist, so will ich den erstern suchen, für welchen

$$a = \frac{m}{m+n} - c, \quad b = \frac{m}{m+n} + c,$$

und setzt man

$$x = \frac{m}{m+n} + z \text{ daher } 1-x = \frac{n}{m+n} - z$$

so erhält man

$$\int x^m dx (1-x)^n = \int dz \left\{\frac{m}{r} + z\right\}^m \left\{\frac{n}{r} - z\right\}^n -$$

wenn man der Kürze wegen $m + n = r$ setzt, und die Grenzen von z werden $-c$ und $+c$ seyn.

Man könnte darauf verfallen, diesen umgeformten Ausdruck nach den Potenzen von z zu entwickeln, indem man ihn so schreibt

$$\frac{m^m n^n}{r^{m+n}} \int dz \left\{1 + \frac{rz}{m}\right\}^m \left\{1 - \frac{rz}{n}\right\}^n;$$

allein verwandelt man ihn in einem exponentiellen Ausdruck, so kömmt man auf ein viel einfacheres Resultat. Zu dieser Absicht bemerke man, daß

$$\left\{1 + \frac{rz}{m}\right\}^m = e^{m \,\mathrm{Log.} \left\{1 + \frac{rz}{m}\right\}}$$

und entwickelt man den angezeigten Logarithmen, so findet man

$$\left\{1 + \frac{rz}{m}\right\} = e^{rz - \frac{r^2 z^2}{2m} + \frac{r^3 z^3}{3m^2} - \text{etc.}}$$

auf gleiche Art

$$\left\{1 - \frac{rz}{n}\right\} = e^{-rz - \frac{r^2 z^2}{2n} - \frac{r^3 z^3}{3n^2} - \text{etc.}}$$

Dieses vorausgesetzt, so reducirt sich das gesuchte Integrale, wenn man das Glied, welches z^3 enthält, und die folgenden unbeachtet läßt, wovon wir bald die Möglichkeit einsehen werden, wenn m und n große Zahlen sind, auf

$$\int e^{-\frac{r^2 z^2}{2}\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right\}} dz = \int e^{-\frac{r^3 z^2}{2mn}} dz;$$

und setzt man

$$\frac{r^3 z^2}{2mn} = t^2 \text{ also } z = t \sqrt{\left\{\frac{2mn}{r^3}\right\}},$$

so verwandelt es sich in

$$\sqrt{\left\{\frac{2mn}{r^3}\right\}} \int e^{-t^2} dt;$$

und da die Grenzen von z, $-c$ und $+c$ sind, so werden die von t

$$t = -c\sqrt{\left\{\frac{r^3}{2mn}\right\}},\ t = +c\sqrt{\left\{\frac{r^3}{2mn}\right\}}:$$

aber da die Function e^{-t^2} dieselbe bleibt, was für ein Zeichen auch vor t steht, so ist es hinreichend, obiges Integrale von $t = 0$ bis $t = c\sqrt{\left\{\frac{r^3}{2mn}\right\}}$ zu nehmen, und den so erhaltenen Werth zu verdoppeln.

Hierdurch erhält man

$$\int x^m dx (1-x)^n = \frac{m^m . n^n}{r^{m+n}} . 2\sqrt{\left\{\frac{2mn}{r^3}\right\}} \int e^{-t^2} dt;$$

und theilt man dieses Resultat durch

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n+1}} \sqrt{\left\{\frac{2\pi mn}{m+n}\right\}},$$

als den Näherungswerth für das Integrale $\int x^m dx (1-x)^n$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ genommen, so erhält man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

Also von dem Werthe von $\int e^{-t^2} dt$ zwischen den oben angegebnen Grenzen, als dem endlichen Resultate hängt die verlangte Näherung ab; aber dieses Integrale von $t = 0$ bis t unendlich, ist blos, wie man weiter unten sehen wird $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, und es nähert sich diesem Werthe sehr, sobald t einigermaßen bedeutend wird, weil die Function e^{-t^2} alsdann mit einer immer mehr und mehr zunehmenden Geschwindigkeit geringer

wird. Es folgt hieraus, daß der Werth der gesuchten Wahrscheinlichkeit immerwährend der Einheit sich nähert, und ihr um so näher kömmt, je bedeutender die Grenze

$$t = c\sqrt{\left\{\frac{r^3}{2mn}\right\}}$$

ist. Damit dem aber so sey, ist erforderlich, daß c um vieles $\frac{1}{\sqrt{r}}$ übersteige, denn da $\sqrt{\left\{\frac{r^3}{2mn}\right\}} = \sqrt{r}$. $\sqrt{\left\{\frac{r^2}{2mn}\right\}}$ so reducirt sich die Größe $\frac{r^2}{2mn}$ sobald sie ein Minimum wird, welches $m = n$ entspricht, auf 2.

Andererseits muß, wenn es erlaubt seyn soll, das Glied $\frac{r^3 z^3}{3m^2}$ in der Exponentiellen Reihe von dem entwickelten $\left\{1 + \frac{rz}{m}\right\}^m$ unbeachtet zulassen, dieses Glied, wenn man $z = c$ setzt, sehr klein bleiben. Nimmt man aber den Factor $\frac{r^2}{3m^2}$ der nicht weniger als $\frac{1}{3}$ betragen kann, besonders, so bleibt der Factor rz^3, der, da er bei der Grenze des Integrals rc^3 wird, und sich in $r^{1-3/s}$ verwandelt, wenn man $c = \frac{1}{\sqrt[s]{r}}$ setzt, einen negativen Exponenten bekömmt, wenn $\frac{3}{s} > 1$.

Verbindet man diese Bedingung mit der vorhergehenden, so läßt sich daraus folgern, daß, damit die verlangte Näherung erhalten werde, c zwischen $\frac{1}{\sqrt{r}}$ und $\frac{1}{\sqrt[3]{r}}$ seyn müsse; daß folglich bei übrigens gleichen Umständen c desto kleiner genommen werden könne, je größer r ist und daß je weniger man den Werth von c verringert, um so größer die Grenze von t werde, und so nach die ge-

suchte Wahrscheinlichkeit um so mehr der Einheit sich nähere.

2) Der vollständige Werth $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ von dem Integrale $\int e^{-t^2}dt$, der sich schon oben ergeben (Note I. N. 8.) läßt sich leicht aus der Gleichung ableiten

$$\left\{\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right\}\left\{\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right\}=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

die ich zu Ende der Traité élementaire de Calcul differentiel et de Calcul intégral angeführt habe, und in welcher die Integralien von $x=0$ bis $x=1$ genomen sind.

Setzt man in dieser Gleichung $x=e^{-qt^2}$, so wird sie

$$4q^2\left\{\int\frac{tdte^{-qt2}.e^{-2qrt2}}{\sqrt{(1-e^{-2qt2})}}\right\}\left\{\int\frac{tdte^{-qt2}.e^{-q(2r+1)t2}}{\sqrt{(1-e^{-2qt2})}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

wo die Grenzen von t das Unendliche negativ und Null sind. Setzt man nun $q(2r+1)=1$ und bringt den Werth von $2r+1$ in das zweite Glied, so ist alles durch q theilbar, und theilt man unter dem Wurzelzeichen durch $2q$, so erhält man

$$2\left\{\int\frac{tdte^{-t2}}{\sqrt{\left\{\frac{1-e^{-2qt2}}{2q}\right\}}}\right\}\left\{\int\frac{tdte^{-t2(1+q)}}{\sqrt{\left\{\frac{1-e^{-2qt2}}{2q}\right\}}}\right\}=\frac{\pi}{2}$$

und da die Grenze von $\frac{1-e^{-2qt2}}{2q}$ wenn man $q=0$ nimmt, t^2 ist, so reducirt sich obige Gleichung auf

$$2(\int e^{-t2}dt)^2=\frac{\pi}{2}\text{ daher }\int e^{-t2}dt=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Da der Werth dieses Integrals für negative t wie für positive derselbe ist, so kann man statt der Grenzen $t = -\text{inf.}$ und $t = 0$ die in Beziehung zu dem Wachsthum der veränderlichen Größe t in derselben Ordnung auf einander folgenden $t = 0$ und $t = \text{inf.}$ substituiren.

Substituirt man statt e^{-t^2} die entwickelte Reihe desselben nach den steigenden Potenzen von t, und integrirt, so bildet sich eine Reihe, die den Werth von $\int e^{-t^2} dt$ giebt, wenn die Grenze von t keine große Zahl ist; aber im entgegengesetzten Falle muß man eine fallende Reihe suchen, welche erhalten wird, wenn man bedenkt daß

$$\int e^{-t^2} dt = \int \frac{1}{t} . e^{-t^2} t dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} e^{-t^2},$$

und wenn man diese theilweise Integration bei dem Factor e^{-t^2}, nachdem man mit t multiplicirt und dividirt hat, fortsetzt. Auf diese Art findet man die Reihe

$$\int e^{-t^2} dt = \frac{e^{-t^2}}{2t} \left\{ 1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2^2 t^4} - \frac{3 \cdot 5}{2^3 t^6} + \text{etc.} \right\}$$

die, da sie verschwindet, wenn t unendlich ist, von $t = T$ bis t unendlich giebt

$$\frac{1}{2Te^{T^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{3}{2^2 T^4} - \frac{3 \cdot 5}{2^3 . T^6} + \text{etc.} \right\}$$

Zieht man dieses Resultat von $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ab, so erhält man den Werth von $\int e^{-t^2} dt$ von $t = 0$ bis $t = T$.

Obige Reihe hört auf zu convergiren, aber um so später je größer T ist; und da die Glieder derselben abwechselnd positiv und negativ sind; so giebt sie bis dahin sehr enge Grenzen des gesuchten Werthes.

3) In der obigen Umwandlung von $\int x^m dx (1-x)^n$ in $\int e^{-t^2} dt$, haben wir nur die ersten Glieder der exponentiellen Reihe in z angewendet; es ist indessen möglich,

auch auf die übrigen Rücksicht zu nehmen, wenn man zuvörderst den Exponenten von e in dem Produkte der Reihen von $\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m$ und von $\left\{1-\frac{rz}{n}\right\}^n=-t^2$ macht, dieses giebt

$$-\frac{r^2z^2}{2}\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right\}+\frac{r^3z^3}{3}\left\{\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right\}-\text{ꝛc.}=-t^2$$

oder besser

$$\frac{r^3z^2}{2mn}+\frac{r^4z^3(m-n)}{3m^2n^2}+\text{etc.}=t^2$$

wenn man die Zeichen wechselt, reducirt und berücksichtigt, daß $n^2-m^2=-r(m-n)$. Man wird nun aus dieser Gleichung die Grenzen von t mittelst der Grenzen von z ableiten, und hierauf setzen

$$z=At+Bt^2+Ct^3+\text{etc.}$$

um dz zu erhalten; und die Coefficienten A, B, C ꝛc. lassen sich wie gewöhnlich bestimmen, wenn man die Identität zweier Glieder bewerkstelligt: man erhält hiernach

$$\int x^m dx(1-x)^n=\frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\int dz\left\{1+\frac{rz}{m}\right\}^m\left(1-\frac{rz}{n}\right)^n$$
$$=\frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\int e^{-t^2}dt(A+2Bt+3Ct^2+\text{etc.}).$$

Wenn die veränderliche Größe t innerhalb positiver und negativer Grenzen von gleicher Größe eingeschlossen seyn muß, so vereinfacht man die Rechnung, wenn man das Integrale in zwei Theile zerlegt, von welchen der eine die positiven Werthe von t und der andern die negativen Werthe umfaßt; denn da man einerseits hat

$$\int e^{-t^2}dt(A+2Bt+3Ct^2+\text{etc.}),$$

und andererseits

$$-\int e^{-t^2}dt(A-2Bt+3Ct^2-\text{etc.})$$

so erhält man, wenn man das zweite Resultat von dem ersten abzieht

$$\int x^m dx(1-x)^n = \frac{m^m n^n}{r^{m+n}} . 2\int e^{-t^2} dt \; (A+3Ct^2 + \text{etc.}).$$

In dem besondern Falle den wir untersuchen, können die Grenzen von t nur so lange von gleicher Größe angenommen werden, so lange man die höhern Potenzen von z außer der 2ten unbeachtet läßt; ist es aber darum zu thun, das Integrale $\int x^m dx(1-x)^n$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ aufzusuchen, so kömmt es darauf hinaus, wechselseitig die Factoren

$1+\frac{rz}{m}$ und $1-\frac{rz}{n}$ oder die Function e^{-t^2}

als Null anzunehmen, und folglich t als Grenze das unendliche positive und unendliche negative beizulegen. In diesem Falle hat man von $t=0$ bis $t=\text{inf.}$, $\int e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; woraus man leicht mittelst der theilweisen Integration folgert

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2}t + \frac{1}{2}\int e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int e^{-t^2}t^4dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2}t^3 + \frac{3}{2}\int e^{-t^2}t^2dt = \frac{1.3}{2.2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

etc.

daher

$$\int x^m dx(1-x)^n = \frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\sqrt{\pi}\{A+\frac{1}{2}C+\frac{3.5}{2.2}E + \text{etc.});$$

und nimmt man die Seite 348 angezeigte Rechnung vor

um die Coefficienten der verwandelten Reihe von z in t zu erhalten, so findet man

$$A = \sqrt{\left\{\frac{2mn}{r^3}\right\}},$$

$$B = \frac{2}{3}\,\frac{n-m}{r^2}$$

$$C = \frac{m^2 - 11mn + n^2}{18rmn}\,A,$$

etc.

Beschränkt man sich auf das erste Glied, so erhält man genau den Näherungswerth von $\int x^m dx (t-x)^n$ der Note I. Zusatz zu §. 65. aus der Eulerschen Formel abgeleitet ist.

In dem Vorhergehenden bin ich größtentheils dem Wege gefolgt, den Laplace in dem ersten Mémoire eingeschlagen hat, das er über Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt gemacht hat, Savans Etrangers t. VI. p. 626. und Legendre in dem 3ten Theile seiner Exercices de Calcul intégral p. 343.*)

Zu §. 121. Seite 252.

1) Wenn man annimmt, daß die Rente s in gleichen

---

*) Diejenigen, welche die Theorie der Approximation für Formeln von großen Zahlen kennen lernen wollen, können sich Raths holen in Tractatus de formatione et interpolatione serierum de Stirling p. 135. Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis de Moivre pag. 4. des Supplement's und hierauf in der Differentialrechnung von Euler 2ter Thl. 6tes Kap. in den Mémoires de l'Académie des Sciences Jahrgänge 1778 pag. 227, 1782 pag. 1 und 1785 p. 423. und endlich in der Théorie analytique des Probabilités livre 1er 2e partie.

Theilen von $s\,dx$ bezahlt wird, wo x die von der Entstehung der Anstalt verflossene Zeit bezeichnet, und man drückt durch z die Wahrscheinlichkeit aus, daß das Individuum nach Verlauf der Zeit x noch leben wird, und man setzt endlich der Kürze wegen $1+t=q$; so giebt die Summe $s\,dx$ auf den Anfang dieser Zeit reducirt und mit der Wahrscheinlichkeit sie zu bezahlen multiplicirt

$$\frac{s\,z\,dx}{q^x} \text{ daher } S = s\int\frac{z\,dx}{q^x}$$

und das Integrale muß genommen werden von $x=0$ bis zu den höchsten in der Sterblichkeitstabelle vorkommenden Alter.

Das Vorhergehende setzt voraus, daß man den algebaischen Ausdruck für das Gesetz der Sterblichkeit habe, oder die Gleichung für die Curve, die dieses Gesetz ausdrückt. (§. 106.) Es sey $y=f(x)$ diese Gleichung, wo y die Zahl der Lebenden von dem Alter x von der Geburt an gerechnet bedeutet; um die Entstehung von x auf das Alter a zu übertragen, ist es hinreichend $a+x$ statt x zu setzen, dieses giebt $y=f(a+x)$; da nun die Zahl der vom Alter a lebenden $f(a)$ ist, so erhält man

$$z=\frac{f(a+x)}{f(a)} \text{ und } S=\frac{s}{f(a)}\int\frac{dx\,f(a+x)}{q^x}.$$

Man kann die veränderliche Größe x von der Geburt angehen lassen, wenn man nur q^{x-a} anstatt q^x schreibt, und obige Formel wird alsdann

$$S=\frac{s}{f(a)}\int\frac{dx\,f(x)}{q^{x-a}},$$

wo das Integrale von $x=a$ bis zu Ende der Sterblichkeitstabelle genommen wird.

2) Wenn die Rente erst nach Verlauf von n Jahren von der Zeit des Einkaufes angerechnet, angehen soll, und a ist das damalige Alter, so wird der Werth des Ka:

pitals noch seyn

$$S = \frac{s}{f(a)} \int \frac{dx f(x)}{q^{x-a}},$$

aber wo das Integrale nur von $x = a + n$ angehen darf, weil man den ganzen Theil der der ersten Zahlung der Rente vorhergeht, abziehen muß.

Die Anwendung dieser Ausdrücke, sey es auf die Formel von Lambert, oder auf die Hypothese von Moivre, die §. 106. angeführt sind, ist zu leicht, als daß es nöthig wäre, sich dabei aufzuhalten; ich beschränke mich daher blos darauf zu bemerken, daß die Einführung des Gesetzes der Stetigkeit, wonach die Todesfälle und die Zahlungen auf jeden Augenblick des Alters vertheilt sind, bei weitem besser als alle übrigen Hypothesen mit dem Falle übereinkommt, wo der Banquier sich anheischig macht, den Erben den Theil der Rente bis zum Tode des Rentirers zu bezahlen, weil man im praktischen Leben für kleine Zeiträume keine zusammengesetzten, sondern blos einfache Interessen erhält.

3) Setzt man Differenzen statt der Differentialien, so kann man jeden beliebigen Zwischenraum zwischen den Zahlungen annehmen; denn alsdenn kann man die Summe der Werthe von dem Ausdrucke

$$\frac{s f(x)}{f(a) q^{x-a}}$$

wenn man von $x = a$ ausgeht, berechnen, indem man x um die Differenz h die den Zwischenraum zweier Zahlungen bezeichn. wachsen läßt.

Diese Summe hängt ab, wie bekannt, von dem Integrale

$$\frac{1}{f(a)} \Sigma \frac{s f(x)}{q^{x-a}}$$

und man erhält die Entwickelung derselben durch die Seite 327 angeführte summatorische Reihe von Euler, wenn man $u = \frac{s f(x)}{f(a) q^{x-a}}$ macht. Dieses ist ungefähr die Art, wie Laplace diesen Gegenstand in der Théorie analytique des Probabilités pag. 426 behandelt.

Zu §. 144. Seite 295.

Die Formel dieses §s wird

$$\frac{\int x^p dx (1-x)^q}{\int x^p dx (1-x)^q + \int x^q dx (1-x)^p}$$

wo die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ zu nehmen sind.

Wenn $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$, so kann man $\int x^q dx (1-x)^p$ in $\int x^p dx (1-x)^q$ verwandeln, wenn man darauf sieht, daß man diesen letztern Ausdruck von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ nimmt, denn macht man $x = 1 - z$, so ist

$$\int x^q dx (1-x)^p = -\int z^p dz (1-z)^q,$$

zwischen den Grenzen $z = \frac{1}{2}$, $z = 0$ und folglich $\int z^p dz (1-z)^q$ oder $\int x^p dx (1-x)^q$ wenn man die Grenzen umkehrt, nämlich wenn man von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ integrirt.

In diesem Falle wird der Nenner der oben angegebenen Wahrscheinlichkeit die Summe der Werthe von demselben Integrale $\int x^p dx (1-x)^q$ von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 1$ genommen, und hierauf von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$, was dasselbe ist, wie das ganze Integral von $x = 0$ bis $x = 1$; die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit wird hiernach

$$\frac{\int x^p dx (1-x)^q}{\int x^p dx (1-x)^q}$$

wo das Integral des Zählers von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 1$ genommen werden muß, und das des Nenners von $x = 0$ bis $x = 1$. Dieses ist genau derselbe Ausdruck, den Laplace pag. 33. des Supplement, das er seiner Théorie analytique des Probabilités beigefügt hat, giebt, und das bei dem Drucke des Artikels, worauf sich das vorhergehende bezieht, noch nicht erschienen war.

Druckfehler.

Seite	Zeile	statt	lese man
35	16	$(m+n)^2$	$(m+n)^3$
42	17	$10m^2n^2$	$10m^2n^3$
52	14	$2^{\frac{1}{100}}$	$\frac{1}{2^{100}}$
-	19	Logorithmen	Logarithmen
60	10	$r(m+1)$	$r(m-1)$
63	1	$\frac{sm'-1}{s(m'-n')}$	$\frac{sm'-1}{s(m'+n')}$
80	2 von unten	1.2.3.5	1.2.3.4.5
95	24 im Nenner	2.2..s	1.2...s
96	8	$\left(\frac{e}{g}\right)$	$\left(\frac{e}{g}\right)^t$
116	1	Logorithmen	Logarithmen
117	1 der Note	$\frac{A}{P_m^n} =$	$\frac{B}{P_m^n} =$
-	3	$\left\{\frac{m-i-1}{m-1}\right\}$	$\left\{\frac{m-i-1}{m-1}\right\}^n$
144	24	$\frac{\alpha^2}{a+\alpha}$	$\frac{\alpha}{a+\alpha}$
-	22	$\frac{\alpha}{a(a+\alpha)}$	$\frac{\alpha^2}{a(a+\alpha)}$
152	7	y	γ
161	7	$\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})^{-1}$	$\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})^{-2}$
271	12 der Note muß heißen		

$$h+h'+h''+h''' : a+a'+a''+a''' = h : a = h' : a' \text{ etc.}$$

Seite	Zeile	statt	lese man
172	14	$+\frac{116}{184}$	$=\frac{116}{184}$
175	7	Rechnung	Gleichung
„	12	$(z - n\alpha z n^{-1}$	$(z^n - n\alpha z^{n-1}$
192	3	$\frac{(m+n)^q}{n}$	$\frac{(m+n)q}{n}$
202	3	$\frac{2047}{2048}$	$\frac{2048}{2049}$
218	23	$\frac{222}{300}$	$\frac{224}{300}$
227	7	$4+3+2+1$	$4+2+1$
235	14	$\frac{M_2 q^3}{N}$	$\frac{M_3 q^3}{N}$
236	16	$\frac{v_2}{q_2}$	$\frac{v_2}{q^2}$
238	17	$e'f + e'f$	$e'f + ef'$
292	17	$\frac{e^p}{e^p + (1-e)^e}$	$\frac{e}{e^p + (1-e)^p}$
298	7	$e^{p-p} f^q$	$e^{p-q} f^q$
322	3 der 3te Factor etwas zu hoch		
323	20	q'^q	$q'^{q'}$
329	2	+ etc.	setzt
331	8 im Exponenten $^2/_3$		$^3/_2$
344	12	$(1+\frac{rz}{m})$	$\{1+\frac{rz}{n}\}^m$
„	24	$\{1-\frac{rz}{n}\}$	$\{1-\frac{rz}{n}\}^n$
350	20	$\int e^{-t^2} dt$	$\int e^{-t^2} t^2 dt$
351	8	$(1-x)^n$	$(1-x)^n$